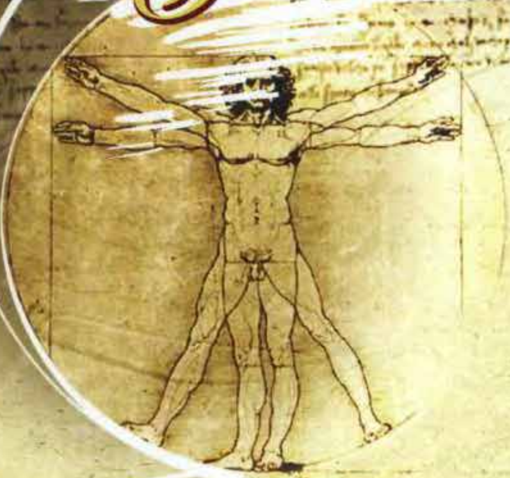
Тайны Золотого сечения

PHI=1,618



А. Стахов
А. Слученкова
И. Щербаков

Код да Винчи

Код да Винчи и ряды Фибоначчи

ПИТЕР®

А. Стахов
А. Слученкова
И. Щербаков

Код да Винчи и ряды Фибоначчи

ПИТЕР®

Москва · Санкт-Петербург · Нижний Новгород · Воронеж
Ростов-на-Дону · Екатеринбург · Самара · Новосибирск
Киев · Харьков · Минск
2006

А. Стахов, А. Слученкова, И. Щербаков

Код да Винчи и ряды Фибоначчи

Заведующая редакцией	*В. Малышкина*
Руководитель проекта	*И. Проворов*
Художник	*С. Маликова*
Литературный редактор	*С. Федорова*
Корректоры	*И. Проворов, С. Федорова*
Верстка	*И. Проворов*

ББК 86.4 УДК 133

Стахов А., Слученкова А., Щербаков И.

С78 Код да Винчи и ряды Фибоначчи. — СПб.: Питер, 2006. — 320 с.: ил.

ISBN 5-469-01369-3

Триллер «Код да Винчи», написанный популярным английским писателем Дэном Брауном, стал бестселлером XXI века. Но что означает «код да Винчи»? Что это за число, которое Леонардо да Винчи назвал Золотым сечением, и не оно ли лежит в основе кода да Винчи? Кто раскроет его тайну, тот будет владеть миром!

Уникальная книга, которую вы держите в руках, позволит вам приблизиться к раскрытию этой тайны.

Термин «Золотое сечение» был введен Леонардо да Винчи, он называл его «божественной пропорцией». В течение многих тысячелетий оно было объектом восхищения и изучения выдающихся ученых и мыслителей: Пифагора, Платона, Евклида, Павла Флоренского. Пирамида Хеопса, знаменитый греческий храм Парфенон, непревзойденная «Мона Лиза», этюды Шопена — вот далеко не полный перечень выдающихся произведений искусства, наполненных чудесной гармонией, основанной на Золотом сечении и математических закономерностях, которые определяют также строение Вселенной и всего живого на Земле.

ISBN 5-469-01369-3

ООО «Питер Пресс», 198206, Санкт-Петербург, Петергофское шоссе, д. 73, лит. А29.
Подписано в печать 30.03.06. Формат 60×90/16. Усл. п. л. 16,8.
Тираж 4000. Заказ № 2391.
Отпечатано с готовых диапозитивов в ООО «Типография Правда 1906».
195299, С.-Петербург, Киришская ул., 2.
Тел.: (812) 531-20-00, (812) 531-25-55

Оглавление

Книга посвящается светлой памяти замечательного человека, ученого и педагога, доктора медицинских наук, профессора Георгия Григорьевича Щербакова

Вместо предисловия

Я слежу за научным творчеством профессора А. П. Стахова очень давно, наверное, с момента публикации его первой книги «Введение в алгоритмическую теорию измерения» (1977), которая была представлена автором в 1979 году на научном семинаре Института математики Академии наук Украины. Но особенно мой интерес к научным исследованиям А. П. Стахова повысился после его блестящего выступления в 1989 году на заседании Президиума Академии наук Украины, в котором профессор Стахов доложил о научных и инженерных разработках в области «компьютеров Фибоначчи», выполненных под его научным руководством в Винницком политехническом институте.

Я достаточно хорошо знаком с научными работами профессора Стахова. В последние годы, вплоть до отъезда Алексея Петровича в Канаду в начале 2004 года, мы поддерживали активные творческие контакты, часто встречались. В процессе этих встреч я сумел убедиться в его высокой научной квалификации и обширных познаниях в различных областях современной науки. Все это дает мне полное основание высказать достаточно квалифицированное мнение о научном творчестве автора этой книги.

Первой статьей А. П. Стахова, которую я рекомендовал для публикации в журнале «Доклады Академии наук Украины» (1993, № 7), была статья «Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи» (авторы А. П. Стахов и И. С. Ткаченко). В статье была изложена теория нового класса гиперболических функций — *гиперболических функций Фибоначчи и Люка*. Украинские ученые открыли новый класс гиперболических функций, основанных на Золотом сечении, числах Фибоначчи и Люка! Эти функции могут привести к созданию новой геометрии — **геометрии Лобачевского — Стахова — Ткаченко**, в которой основные математические соотношения будут описываться с помощью нового класса гиперболических функций.

В 2004 году «Украинский математический журнал» (№8) опубликовал статью А. П. Стахова «Обобщенные Золотые сечения и новый подход к геометрическому определению числа». Эта статья содержит ряд выводов фундаментального характера.

Прежде всего, профессор Стахов обобщил задачу о Золотом сечении. Суть этого обобщения предельно проста. Если задаться неотрицательным целым числом $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$ и разделить отрезок AB точкой C в такой пропорции, чтобы было:

$$\frac{CB}{AC} = \left(\frac{AB}{CB}\right)^p,$$

то мы приходим к алгебраическому уравнению

$$x^{p+1} = x^p + 1,$$

корни которого называются обобщенными золотыми пропорциями или золотыми p-пропорциями.

Давайте вдумаемся в этот результат. В течение нескольких тысячелетий, начиная с Пифагора и Платона, человечество пользовалось широко известным классическим Золотым сечением, которое считалось единственным, уникальным и неповторимым. И вот в конце XX века украинский ученый обобщает эту задачу и доказывает существование бесконечного числа Золотых сечений! И все они имеют такое же право на существование, как и классическое Золотое сечение.

Используя понятие золотой p-пропорции, А. П. Стахов вводит новое определение действительного числа, которое он назвал «кодом золотой p-пропорции». Это понятие, которое является развитием известного ньютоновского определения действительного числа, может быть положено в основу новой теории действительных чисел.

Открытие профессора Стахова имеет важное прикладное значение и может привести к созданию принципиально новой компьютерной арифметики и новых компьютеров, *компьютеров Фибоначчи*. А. П. Стахов не только провозглашает идею «компьютеров Фибоначчи», но и возглавляет инженерные проекты по созданию таких компьютеров в Винницком Политехническом институте. 65 зарубежных патентов на изобретения в области «компьютеров Фибоначчи», выданных государственными патентными ведомствами США, Японии, Англии, Франции, Германии, Канады и других стран, подтверждают приоритет украинской науки в этой важной области.

Профессор Стахов публикует свои работы в известных международных журналах. Благодаря хорошему знанию английского языка ему всего за год удалось опубликовать 8 (!) фундаментальных статей в Международном междисциплинарном журнале *Chaos, Solitons and Fractals*. Это, несомненно, огромный успех не только А. П. Стахова, но и всей украинской науки.

Этими статьями профессор Стахов, по существу, завершил цикл многолетних исследований по созданию нового направления в математике — *математики гармонии*.

Возникает вопрос: какое место в общей теории математики занимает созданная Стаховым математика гармонии? Мне представляется, что в последние столетия, как выразился когда-то Н. И. Лобачевский, «математики все свое внимание обратили на высшие части аналитики, пренебрегая началами и не желая трудиться над обрабатыванием такого поля, которое они уже раз перешли и оставили за собою». В результате между элементарной математикой, лежащей в основе современного математического образования, и высшей математикой образовался разрыв. И этот разрыв, как мне кажется, и заполняет математика гармонии, разработанная А. П. Стаховым.

В 2003 году по инициативе и под руководством профессора Стахова в Виннице была проведена Международная конференция «Проблемы гармонии, симметрии и Золотого сечения в природе, науке и искусстве». На этой конференции А. П. Стахов был избран президентом Международного клуба Золотого сечения. Это избрание, безусловно, является международным признанием заслуг выдающегося ученого в области теории чисел Фибоначчи и Золотого сечения.

Я с интересом познакомился с программой математического курса «Математика гармонии и Золотое сечение», предлагаемой А. П. Стаховым для физико-математических факультетов педагогических университетов. Эта программа — не что иное, как начало реформы математического образования. У меня нет никаких сомнений в полезности этого курса для будущих учителей математики и физики.

Созданное профессором Стаховым новое научное направление, названное им математикой гармонии, имеет огромное междисциплинарное значение, так как затрагивает основания многих наук, включая математику, теоретическую физику и компьютерные науки. Проект реформы математического образования, предло-

2–2391

женный А. П. Стаховым, открывает новый этап в развитии математического и общего образования, он способствует выработке принципиально нового научного мировоззрения, основанного на принципах гармонии и Золотого сечения.

Ю. А. Митропольский,
доктор технических наук, профессор,
академик Национальной академии наук Украины,
академик Российской академии наук,
почетный директор Института математики
Национальной академии наук Украины,
главный редактор «Украинского
математического журнала»,
Герой Социалистического Труда,
лауреат Ленинской премии

Введение

Дорогие друзья!

Читая эту книгу, вы попадаете в удивительный мир, где узнаете много нового и загадочного о том, что вас окружает в повседневной жизни и о чем вы, возможно, не знали раньше. Мы назвали нашу книгу «Код да Винчи и ряды Фибоначчи». Раскрытие тайны универсального кода Природы имеет большое значение для современной науки, так как с ним связана вся история человечества, нашей Земли, Вселенной и будущее науки.

Наверняка вам не раз приходилось задумываться, почему Природа способна создавать такие удивительные гармоничные структуры, которые восхищают и радуют глаз. Почему художники, поэты, композиторы, архитекторы создают восхитительные произведения искусства из столетия в столетие? В чем же секрет? Какие законы лежат в основе этих гармоничных созданий? Никто не сможет однозначно ответить на этот вопрос, но в нашей книге мы постараемся приоткрыть завесу и рассказать вам об одной из тайн мироздания — Золотом сечении, или, как его еще называют, золотой, или божественной, пропорции. Золотое сечение называется числом PHI в честь великого древнегреческого скульптора Фидия (*Phidius*), который использовал это число в своих скульптурах.

Не одно столетие ученые применяют в своих исследованиях уникальные математические свойства числа PHI, и эти исследования продолжаются и в наши дни. Это число нашло широкое применение во всех областях современной науки, о чем мы также попытаемся популярно рассказать на страницах нашей книги.

Научно-технический прогресс имеет длительную историю. Он прошел в своем историческом развитии несколько этапов (вавилонская и древнеегипетская культура, культура Древнего Китая и Древней Индии, древнегреческая культура, эпоха Средневековья, эпоха Возрождения, промышленная революция XVIII века, великие научные открытия XIX века, научно-техническая революция XX века) и вошел в XXI век, который открывает новую эпоху в истории человечества — эпоху Гармонии. Еще в античный период был сделан ряд выдающихся математических открытий, оказавших определяющее влияние на развитие материальной и духовной культуры: вавилонская шестидесятеричная система счисления и позиционный принцип представления чисел, тригонометрия и геометрия Евклида, несоизмеримые отрезки, Золотое сечение и платоновы тела, начала теории чисел и теории измерения.

И хотя каждый из перечисленных выше этапов имеет свою специфику, вместе с тем он обязательно включает содержание предшествующих этапов. В этом и состоит преемственность в развитии науки. Преемственность может осуществляться в различных формах. Одной из сущностных форм ее выражения являются фундаментальные научные идеи, которые пронизывают все этапы научно-технического прогресса и оказывают влияние на различные области науки, искусства, философии и техники.

К разряду таких фундаментальных идей относится идея гармонии, связанная с Золотым сечением. По словам Б. Г. Кузнецова, исследователя творчества Альберта Эйнштейна, великий физик свято верил в то, что наука, физика в частности, всегда имела своей извечной фундаментальной целью «найти в лабиринте наблюдаемых фактов объективную гармонию». О глубокой вере выдающегося физика в существование универсальных законов гармонии мироздания свидетельствует и еще одно широко известное высказывание Эйнштейна: «Религиозность ученого состоит в восторженном преклонении перед законами гармонии».

В древнегреческой философии Гармония противостояла Хаосу и означала организованность Вселенной, Космоса. Гениальный русский философ Алексей Лосев так оценивает основные достижения древних греков в этой области:

> «С точки зрения Платона, да и вообще с точки зрения всей античной космологии мир представляет собой некое пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического деления — Золотого сечения... Их [древних греков] систему космических пропорций нередко в литературе изображают как курьезный результат безудержной дикой фантазии. В такого рода объяснениях сквозит антинаучная беспомошность тех, кто это заявляет. Однако понять данный историко-эстетический феномен можно только в связи с целостным пониманием истории, то есть используя диалектико-материалистическое представление о культуре и иша ответа в особенностях античного общественного бытия...»

А вот еще одно высказывание, касающееся Золотого сечения. Оно было сделано в XVII веке и принадлежит гениальному астроному Иоганну Кеплеру, автору трех знаменитых законов Кеплера. Свое восхищение Золотым сечением Кеплер выразил в следующих словах:

> «В геометрии существует два сокровища — теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем».

Напомним, что старинная задача о делении отрезка в крайнем и среднем отношении, которая упоминается в этом высказывании, — это и есть Золотое сечение!

С Золотым сечением тесно связаны числа Фибоначчи, открытые в XIII веке итальянским математиком Леонардо из Пизы по прозвищу Фибоначчи. Они составляют числовой ряд, начинающийся с двух единиц, в котором каждое последующее число является суммой двух предыдущих. Отношение соседних чисел ряда Фибоначчи в пределе стремится к Золотому сечению.

В современной науке существует много научных групп, профессионально изучающих Золотое сечение, числа Фибоначчи и их многочисленные приложения в математике, физике, философии, ботанике, биологии, медицине, компьютерной науке. Множество художников, поэтов, музыкантов используют в своем творчестве принцип Золотого сечения. В современной науке сделан ряд выдающихся открытий, основанных на числах Фибоначчи и Золотом сечении. Открытие «квазикристаллов», сделанное в 1982 году израильским ученым Даном Шехтманом и основанное на Золотом сечении и «пентагональной» симметрии, имеет революционное значение для современной физики. Прорыв в современных представлениях о природе формообразования биологических объектов был сделан в начале 90-х годов украинским ученым Олегом Боднаром, создавшим новую геометрическую теорию филлотаксиса.

Белорусский философ Эдуард Сороко сформулировал «Закон структурной гармонии систем», основанный на Золотом сечении и играющий важную роль в процессах самоорганизации. Благодаря исследованиям американских ученых Эллиотта, Працтера и Фишера числа Фибоначчи активно вошли в сферу бизнеса и стали основной из оптимальных стратегий в сфере бизнеса и торговли. Эти открытия подтверждают гипотезу американского ученого Д. Винтера, руководителя группы «Планетарные сердцебиения», согласно которой не только энергетический каркас Земли, но и строение всего живого основаны на свойствах додекаэдра и икосаэдра — двух платоновых тел, связанных с Золотым сечением. И наконец, самое, пожалуй, главное: структура ДНК, генетического кода жизни, представляет собой четырехмерную развертку (по оси времени) вращающегося додекаэдра! Таким образом, оказывается, что вся Вселенная — от Метагалактики и до живой клетки — построена по одному принципу — бесконечно вписываемых друг в друга додекаэдра и икосаэдра, находящихся между собой в пропорции Золотого сечения!

Невероятно, воскликнете вы, почему же я об этом не знал раньше? Почему с такой интересной информацией меня не ознакомили в средней школе или хотя бы в университете? Ведь знания о Золотом сечении, несомненно, обогатили бы каждого из нас. Вряд ли кто-либо из ученых, признанных в области педагогики, сможет дать вразумительный ответ на этот вопрос. Откровенно говоря, и мы, авторы настоящей книги, тоже не можем ответить на этот вопрос. Возможно, дело в традиции. Традиционно классическая наука, а, следовательно, и классическая педагогика относились к Золотому сечению с некоторым предубеждением. Все дело в широком использовании Золотого сечения в астрологии и так называемых эзотерических науках. Материалистическое образование выбросило Золотое сечение вместе с астрологией на свалку сомнительных научных концепций. Результат налицо: большинство людей хорошо знают теорему Пифагора, но имеют весьма смутное представление о Золотом сечении.

Основными источниками информации для написания данной книги стали многочисленные статьи А. П. Стахова, опубликованные в украинских академических и международных журналах, а также следующие его книги и брошюры: «Введение в алгоритмическую теорию измерения» (1977), «Алгоритмическая теория измерения» (1979), «Коды Золотой пропорции» (1984), *Introduction into Fibonacci coding and cryptography* (1999, в соавторстве с Анной Слученковой и Винансио Массинга), «Сакральная геометрия и математика гармонии» (2003), «Новая математика для живой природы» (2003), «Под знаком “Золотого сечения”: исповедь сына студбатовца» (2003), *Hyperbolic Fibonacci and Lucas functions* (2003), *Museum of Harmony and Golden Section* (2003, в соавторстве с Анной Слученковой). Однако книга вряд ли была бы написана без титанических усилий Анны Слученковой и Игоря Щербакова по сбору и систематизации огромного информационного материала по Золотому сечению, содержащегося в многочисленных книгах, статьях и интернетовских сайтах, которые подготовлены русскоязычными и англоязычными авторами в последние десятилетия.

Несомненно, неисчерпаемым источником информации по Золотому сечению является Интернет, в котором представлено огромное количество сайтов русскоязычных и англоязычных авторов, работающих в области Золотого сечения. В книгу включена большая часть материалов сайта «Музей Гармонии и Золотого сечения» (www.goldenmuseum.com), созданного в 2001 году Алексеем Стаховым и Анной Слученковой. В настоящее время этот сайт, представляющий информационные материалы на двух языках (русском и английском), считается одним из наиболее авторитетных источников информации по Золотому сечению и открыт для широкого использования в сети Интернета. В книгу включены многие наглядные материалы по Золотому сечению (прежде всего произведения живописи, скульптуры и архитектуры и их фотографии с детальным анализом), представленные на интернетовских сайтах многих любителей Золотого сечения. Авторы настоящей книги ни в коей мере не претендуют на авторство и благодарят всех любителей Золотого сечения за материалы, доступные в Интернете для всеобщего использования. К сожалению, поскольку эти материалы накапливались годами, мы не в состоянии упомянуть адреса всех веб-сайтов, на которых мы нашли фотографии и материалы, использованные в этой книге. Большинство из них было найдено нами через поисковые системы Интернета. Еще раз хотим выразить благодарность всем, кто увлечен уникальным кодом Природы и активно участвует в распространении знаний о Золотом сечении через всемирную сеть.

Глава 1

Золотое сечение, или Код да Винчи

1.1. Что такое код да Винчи?

Роман Дэна Брауна «Код да Винчи»

Роман «Код да Винчи» американского писателя Дэна Брауна, опубликованный в 2003 году, получил широкую известность и по праву завоевал право называться бестселлером XXI века. Он стал лидером книжных продаж в 2003 году. В первый же день после публикации он был продан в количестве 6000 экземпляров. За первую неделю продажи роман «Код да Винчи» занял первое место в списке нью-йоркских бестселлеров. Позже роман стал хитом номер один среди всех крупных бестселлеров в стране. «Код да Винчи» — один из наиболее продаваемых романов всех времен.

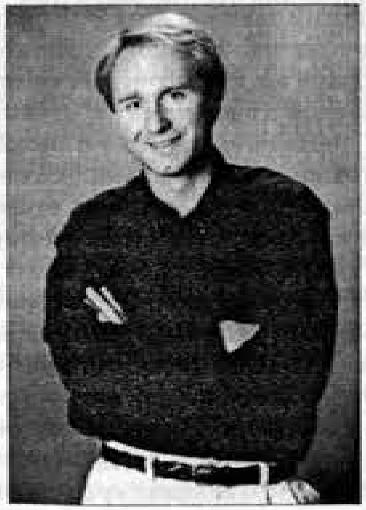
Кем же является автор этого замечательного романа и почему роман стал бестселлером? Американский писатель Дэн Браун родился в 1965 году в Нью-Гэмпшире (США), отец его был профессором математики, а мать — профессиональным музыкантом. Сын победителя «Президентской награды» (*Presidential Award*) и профессионального музыканта, Дэн рос в окружении парадоксов философии в науке и религии. Свою карьеру Дэн Браун начинал как автор песен, музыкант и исполнитель, выпустил несколько компакт-дисков со своими записями.

В 1995 году он попробовал себя как писатель, опубликовав вместе с женой книгу «187 мужчин, от которых следует держать-

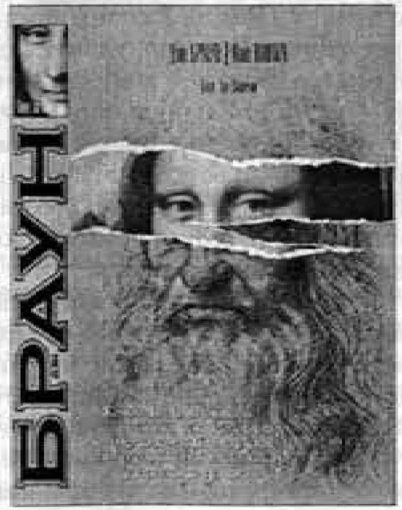
ся подальше: путеводитель для романтически фрустрированных женщин». В 1998 году Дэн, которого всегда интересовали философия, история религии, криптография и тайные организации, опубликовал свой первый роман-триллер «Цифровая крепость». Дальнейшие его произведения также создавались на стыке жанров: в 2000 году свет увидел интеллектуальный конспирологический детектив «Ангелы и демоны», а в 2001-м вышел триллер «Точка обмана» (*Deception Point*).

В 2003 году приключения профессора Роберта Лэнгдона из «Ангелов и демонов» были продолжены романом «Код да Винчи». В начале 2004 года все четыре романа Дэна Брауна побывали в списке бестселлеров «Нью-Йорк Таймс», где пробыли на протяжении нескольких недель.

Что же привлекло читателей в романе Дэна Брауна? «Книга, которую все купили, но мало кто прочитал». «Роман, от которого все в восторге, но мало кто может объяснить почему». «История, которая всех заинтриговала, но мало кто с ней согласился». Именно так критики характеризуют бестселлер Дэна Брауна «Код да Винчи», «взорвавший» книжные магазины в 2003 году, переведенный на 42 языка и разошедшийся 20-миллионным тиражом по всему миру.



Американский писатель Дэн Браун



Книга Дэна Брауна «Код да Винчи»

Главная интрига романа «Код да Винчи» связана с историей христианства. В романе сделана попытка раскрытия тайны Ватикана, связанной с рождением Иисуса Христа. В книге рассказывается о том, как гарвардский профессор Роберт Лэнгдон, занимающийся историей религии и иконографией, пытается разгадать закодированный смысл картины Леонардо да Винчи «Тайная вечеря» и раскрыть тайну Священного Грааля. В основу сюжета положена идея, что церковь на протяжении веков скрывала от верующих, что Иисус Христос женился на блуднице Марии Магдалине и она родила ему ребенка. Согласно Брауну, после распятия беременная Мария скрывается в Галлии, где рожает ребенка от Иисуса, от которого якобы пошел род французских королей династии Меровингов, потомки которых якобы живут до сих пор. Тайну сию хранит таинственный Приорат Сиона, и с убийства в Лувре Великого Магистра этого ордена Жака Соньера и начинается роман.

Великий Магистр оставляет тайное послание своей внучке Софи Неве. Она становится главной героиней триллера, а главным героем — Роберт Лэнгдон, профессор религиозной символики Гарвардского университета, где на самом деле такой дисциплины нет. Роман вызвал невиданный общественный резонанс и скандальную полемику о жизни и смерти Сына Божьего. Сейчас по роману «Код да Винчи» компания «Коламбия Пикчерс» снимает фильм. Конечно, главная причина скандальной известности романа состоит в том, что Дэн Браун этой книгой, по существу, бросил смелый вызов Ватикану и христианской церкви. Ватикан и Русская православная церковь выступили с резкой критикой в адрес романа. Иерархи высказывают серьезную обеспокоенность в связи с тем, что читатели могут воспринять сюжет романа как пересказ евангельской истории и отнестись к книге как к священному тексту.

У каждого, кто прочитал роман Дэна Брауна, невольно возникает вопрос: а что же такое «код да Винчи»? Как сообщает сам автор, секретный код скрыт в произведениях великого гения Возрождения Леонардо да Винчи. Это относится не только к фреске «Тайная вечеря» и портрету Моны Лизы («Джоконды»), но даже к лику на одной из величайших христианских святынь, знаменитой туринской плащанице, якобы представляющему собой автопортрет Леонардо. Авторы настоящей книги берут на себя смелость дать другой ответ на этот вопрос. Проанализируем одну из глав романа «Код да Винчи», в котором описываются воспоминания главного героя книги профессора Роберта Лэнгдона о лекции, прочитанной им для студентов Гарвардского университета.

Лекция профессора Лэнгдона

Главным героем книги «Код да Винчи» является Роберт Лэнгдон, профессор религиозной символики Гарвардского университета. Раскрывая тайну убийства Жака Соньера, Роберт Лэнгдон обращает внимание на тот факт, что это убийство связано с «витрувийским человеком» Леонардо да Винчи (именно такую позу занял Жак Соньер в момент убийства), последовательностью Фибоначчи и знаменитым пентаклом — главным сакральным символом пифагорейского союза. Этот факт приводит профессора Лэнгдона к следующим размышлениям:

> «Да Винчи, последовательность Фибоначчи, пентакл... Неким непостижимым образом их связывала одна из самых фундаментальных концепций в истории искусств, рассмотрению которой он, Лэнгдон, даже посвящал несколько лекций на своем курсе... Мысленно он перенесся в Гарвард, увидел себя перед аудиторией. Вот он поворачивается к доске, где мелом выведена тема «Символизм в искусстве». И пишет под ней свое любимое число: 1,618».

Как известно, это уникальное число называется числом PHI в честь выдающегося греческого скульптора Фидия (*Phidias*), который широко использовал его в своих скульптурах. Далее в своей лекции Лэнгдон объясняет, что, несмотря на почти мистическое происхождение, число PHI сыграло уникальную роль кирпичика в фундаменте построения всего живого на Земле. Все растения, животные и даже человеческие существа наделены физическими пропорциями, основанными на числе PHI. Эта вездесущность PHI в природе указывает на связь всех живых существ. Раньше считали, что число PHI было предопределено Творцом Вселенной. Ученые древности называли одну целую шестьсот восемнадцать тысячных «божественной пропорцией».

Профессор Лэнгдон демонстрирует студентам огромное количество примеров проявления «божественной пропорции» в природе. Соотношение мужских и женских особей в пчелином рое, наутилус (спиралеобразная морская раковина), цветок подсолнечника со зрелыми семенами, спиралеобразно закрученные листья початка кукурузы, расположение листьев на стеблях растений, сегментационные части тел насекомых — все они в своем строении послушно следуют закону «божественной пропорции».

Не только творения природы, но и произведения искусства демонстрируют связь с «божественной пропорцией». Лэнгдон демонстрирует студентам знаменитый рисунок Леонардо да Винчи, на котором изображен обнаженный мужчина в круге. «Витрувийский человек» — так он был назван в честь Маркуса Витрувия, гениального римского архитектора, который вознес хвалу «божественной пропорции» в своих «Десяти книгах об архитектуре».

Роль Леонардо да Винчи в развитии теории и практического использования «божественной пропорции» Лэнгдон оценивает очень высоко:

> «Никто лучше да Винчи не понимал божественной структуры человеческого тела. Его строения. Да Винчи даже эксгумировал трупы, изучая анатомию и измеряя пропорции костей скелетов. Он первым показал, что тело человека состоит из «строительных блоков», соотношение пропорций которых всегда равно нашему заветному числу».

Совершенное человеческое тело подчинено «принципу божественной пропорции». Чтобы убедиться в этом, достаточно измерить расстояние от пупа до пола, а затем разделить свой рост на это расстояние. Получим число PHI. Тот же результат мы получим, если измерим расстояние от плеча до кончиков пальцев и затем разделим это расстояние на расстояние от локтя до тех же кончиков пальцев. Далее, расстояние от верхней части бедра до пола, поделенное на расстояние от колена до пола, дает нам снова число PHI. Фаланги пальцев рук, фаланги пальцев ног... И снова PHI. Выходит, каждый человек есть живое воплощение «божественной пропорции».

> «За кажущимся хаосом мира скрывается порядок. И древние, открывшие число PHI, были уверены, что нашли тот строительный камень, который Господь Бог использовал для создания мира, и начали боготворить Природу. Можно понять почему. Божий промысел виден в Природе, по сей день существуют языческие религии, люди поклоняются Матери Земле. Многие из нас прославляют Природу, как делали это язычники, вот только сами до конца не понимают почему. Прекрасным примером является празднование Майского дня, празднование весны... Земля возвращается к жизни, чтобы расцвести во всем своем великолепии. Волшебное мистическое наследие «божественной пропорции» пришло к нам с незапамятных времен. Человек просто играет по правилам Природы, а потому искусство есть не что иное, как попытка человека имитировать красоту, созданную Творцом Вселенной. Так что нет ничего удивительного в том, что во время наших занятий мы увидим еше немало примеров использования "божественной пропорции" в искусстве».

В своей лекции профессор Лэнгдон показывает студентам слайды с произведениями Микеланджело, Альбрехта Дюрера, да Винчи и многих других художников и доказывает, что каждый из них строго следовал «божественной пропорции» в построении своих композиций. Лэнгдон демонстрирует наличие магического числа и в архитектуре: в пропорциях греческого Парфенона, пирамид Египта, даже здания ООН в Нью-Йорке. PHI проявлялось в строго организованных структурах моцартовских сонат, в Пятой симфонии Бетховена, а также в произведениях Бартока, Дебюсси и Шуберта. Число PHI использовал в расчетах даже Страдивари при создании своей уникальной скрипки.

В заключение своей лекции Лэнгдон обращается к *пентаграмме*, или *пентаклу*. Этот символ является одним из самых могущественных образов, который на протяжении многих веков и во многих культурах считался одновременно божественным и магическим. Если нарисовать пентаграмму и провести в ней все диагонали, то они автоматически делятся на сегменты, соответствующие «божественной пропорции», то есть соотношение линейных сегментов в пятиконечной звезде *всегда* равно числу PHI, что превращает этот символ в наивысшее выражение «божественной пропорции». Именно по этой причине пятиконечная звезда всегда была символом красоты и совершенства и ассоциировалась с Венерой, богиней красоты, и священным женским началом.

Леонардо да Винчи и Золотое сечение

Каждый образованный человек независимо от того, какую профессию он избрал, знает или хотя бы слышал об одном из самых замечательных периодов в истории человечества, об эпохе Ренессанса — великом времени Возрождения. Эпоха Возрождения ассоциируется с именами таких титанов, как Леонардо да Винчи, Микеланджело, Рафаэль, Николай Коперник, Альберт Дюрер, Лука Пачоли. И первое место в этом списке по праву занимает Леонардо да Винчи, величайший художник, инженер и ученый эпохи Возрождения. Джорджо Вазари, знаменитый итальянский историк искусства, архитектор и художник, в своих «Жизнеописаниях» утверждает следующее.

«Дивным и божественным был Леонардо, сын Пьеро из Винчи, и он достиг бы великих итогов в науках и письменности, не будь он таким многосторонним и непостоянным».

Имеется много авторитетных свидетельств о том, что именно Леонардо да Винчи был одним из первых, кто ввел сам термин «Золотое сечение». Белорусский философ Эдуард Сороко, который считается одним из наиболее авторитетных ученых в области теории гармонии и Золотого сечения, в своей знаменитой книге «Структурная гармония систем» (1984) пишет по этому поводу следующее:

«Термин "золотое сечение" (*aurea sectio*) идет от Клавдия Птолемея, который дал это название числу 0,618, убедившись в том, что рост человека правильного телосложения естественно делится именно в таком отношении. Закрепился же данный термин и стал популярным благодаря Леонардо да Винчи, который часто его использовал».

Доказано, что Леонардо да Винчи использовал пропорции Золотого сечения во многих своих самых знаменитых произведениях, и в частности, в «Тайной вечере» и знаменитой «Джоконде» (гармонический анализ «Джоконды» на основе Золотого сечения приведен ниже).

Для самого Леонардо да Винчи искусство и наука были связаны неразрывно. Отдавая в «споре искусств» пальму первенства живописи, Леонардо да Винчи понимал ее как универсальный язык (подобный математике в сфере науки), который воплощает посредством пропорций и перспективы все многообразные проявления разумного начала, царящего в природе. Важнейшим источником для изучения воззрений Леонардо да Винчи по теории искусства являются его записные книжки и рукописи (около 7 тысяч листов). Сам Леонардо не оставил систематического изложения своих мыслей. «Трактат о живописи», составленный после смерти Леонардо да Винчи его учеником Ф. Мельци и оказавший огромное влияние на европейскую художественную практику и теоретическую мысль, состоял из отрывков, во многом произвольно извлеченных из контекста его записок.

В «Трактате о живописи» излагаются сведения о пропорциях. В эпоху Возрождения математическое понятие «золотая пропорция» было возведено в ранг главного эстетического принципа. Согласно художественным канонам Леонардо, золотая пропорция получается при делении тела на две неравные части линией

талии, при котором отношение бóльшей части к меньшей равно отношению целого к бóльшей части (это отношение приблизительно равно 1,618). Высота лица (до корней волос) относится к вертикальному расстоянию между дугами бровей и нижней частью подбородка как расстояние между нижней частью носа и нижней частью подбородка относится к расстоянию между углами губ и нижней частью подбородка. Это расстояние также равно золотой пропорции.

Разрабатывая правила изображения человеческой фигуры, Леонардо да Винчи пытался на основе литературных сведений древности восстановить так называемый квадрат древних. Он выполнил рисунок, в котором показано, что размах вытянутых в сторону рук человека примерно равен его росту, вследствие чего фигура человека вписывается в квадрат и круг («витрувийский человек» Леонардо да Винчи).

Наиболее ярким свидетельством огромной роли Леонардо да Винчи в развитии теории Золотого сечения является его влияние на творчество выдающегося итальянского математика эпохи Возрождения Луки Пачоли, с которым Леонардо сблизился в Милане. В момент знакомства с Лукой Пачоли, который именовал себя Лука ди Борго-Сан-Сеполькро, последний был уже знаменитым математиком, автором книги «Сумма об арифметике, геометрии, пропорциях и пропорциональностях», изданной в Венеции в 1494 году. В Милан Пачоли прибыл в 1496 году. Леонардо да Винчи оставил несколько записей, которые свидетельствуют о его знакомстве с Лукой Пачоли. Считается, что именно под влиянием Леонардо да Винчи Лука Пачоли начинает писать свою «вторую великую книгу», названную им «О божественной пропорции». Эта книга была опубликована в 1508 году. Для этой книги Леонардо сделал иллюстрации. Об авторстве Леонардо сохранилось свидетельство самого Пачоли:

«...таковые были сделаны достойнейшим живописцем, перспективистом, архитектором, музыкантом и всеми совершенствами одаренным Леонардо да Винчи, флорентийцем, в городе Милане...»

Таким образом, несомненно, что именно Леонардо да Винчи более чем кто-либо своими исследованиями способствовал тому, чтобы Золотое сечение вошло в культуру Возрождения и стало ее главным эстетическим каноном. В 1986 году польский журналист, ученый-египтолог Ян Гржеджиельский (*Jan Grzedzielski*) написал удивительную книгу «Энергетически-геометрический код природы». Главная идея книги состоит в том, чтобы показать роль Золотой пропорции как универсального кода природы на всех уровнях ее организации. Но первым эту мысль выразил в своей знаменитой «Божественной пропорции» великий итальянский математик Лука Пачоли. Еще раз напомним, что книга Пачоли написана под непосредственным влиянием Леонардо да Винчи, который своими иллюстрациями к ней способствовал ее широкому признанию в научном мире и, по существу, был идейным вдохновителем и соавтором этой книги. И поэтому мы имеем полное право назвать Леонардо «крестным отцом» Золотого сечения в европейской культуре. И именно поэтому авторы берут на себя смелость утверждать, что **понятие «код да Винчи», введенное Дэном Брауном, есть не что иное, как универсальный код Природы, названный Леонардо да Винчи Золотым сечением.** Именно Леонардо да Винчи, а вслед за ним Лука Пачоли, возможно, первыми в истории науки поняли роль этой уникальной пропорции в структурах Природы.

1.2. Геометрическое определение Золотого сечения

Задача о делении отрезка в крайнем и среднем отношении

Евклид

Самым известным математическим сочинением античной науки являются «Начала» Евклида. Это выдающееся научное произведение было написано Евклидом еще в III веке до н. э. и содержит все основы античной математики: элементарную геометрию, теорию чисел, алгебру, теорию пропорций и отношений, методы определения площадей и объемов. Евклид подвел в этом сочинении итог трехсотлетнему развитию греческой математики и создал прочный фундамент для дальнейшего развития математики.

Сведения об Евклиде чрезвычайно скудны. Кроме нескольких анекдотов нам известно лишь, что учителями Евклида в Афинах были ученики Платона, а в правление Птолемея I (306–283 годы до н. э.) он преподавал во вновь основанной школе в Александрии. «Начала» Евклида превзошли сочинения его предшественников в области геометрии и на протяжении более двух тысячелетий оставались основным трудом по элементарной математике.

В 13 частях, или книгах, «Начал» содержится бóльшая часть знаний по геометрии и арифметике эпохи Евклида.

Именно из «Начал» Евклида к нам пришла следующая геометрическая задача, называемая задачей *о делении отрезка в крайнем и среднем отношении.*

Суть задачи состоит в следующем. Разделим отрезок AB точкой C в таком отношении, чтобы бóльшая часть отрезка CB так относилась к меньшей части AC, как отрезок AB к своей бóльшей части CB (рис. 1.1), то есть

$$\frac{AB}{CB} = \frac{CB}{AC}. \tag{1.1}$$

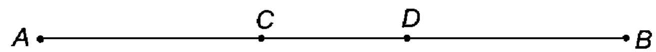


Рис. 1.1. Деление отрезка в крайнем и среднем отношении («Золотое сечение»)

Обозначим отношение (1.1) через x. Тогда, учитывая, что $AB = AC + CB$, отношение (1.1) можно записать в следующем виде:

$$x = \frac{AC+CB}{CB} = 1 + \frac{AC}{CB} = 1 + \frac{1}{\frac{CB}{AC}} = 1 + \frac{1}{x},$$

откуда вытекает следующее алгебраическое уравнение для вычисления искомого отношения x:

$$x^2 = x + 1. \tag{1.2}$$

Из «физического смысла» отношения (1.1) вытекает, что искомое решение уравнения (1.2) должно быть положительным числом, откуда вытекает, что решением задачи о делении отрезка в крайнем и среднем отношении является положительный корень уравнения (1.2), который мы обозначим через τ, то есть

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Приближенное значение золотой пропорции равно:

$$\tau \approx 1{,}61803\ 39887\ 49894\ 84820\ 45868\ 34365\ 63811\ 77203\ldots$$

Не удивляйтесь этому числу. Не забывайте, что это число — иррациональное! В нашей книге мы будем использовать следующее приближенное значение: $\tau \approx 1{,}618$ или даже 1,62.

Именно это удивительное число, обладающее уникальными алгебраическими и геометрическими свойствами, стало эстетическим каноном древнегреческого искусства и искусства эпохи Возрождения. Кто же ввел термин «Золотое сечение»? Наиболее часто введение этого названия приписывают Леонардо да Винчи. Однако существует мнение, что великий Леонардо не был первым. Считается, что этот термин идет от Клавдия Птоломея, великого античного астронома и географа (II век н. э.). Однако закрепился этот термин и стал популярным благодаря именно Леонардо да Винчи, что дает нам право называть это число *кодом да Винчи*.

Как упоминалось, очень часто Золотое сечение обозначают также греческой буквой Φ (число PHI). Эта буква является первой буквой в имени знаменитого греческого скульптора Фидия (*Phidius*), который широко использовал Золотое сечение в своих скульптурных произведениях.

Напомним, что Фидий (V век до н. э.) наряду с Поликлетом считался одним из двух самых значительных и авторитетных мастеров древнегреческой скульптуры эпохи классики. Он прославился тем, что руководил работами по художественному убранству Акрополя, изваяв колоссальную бронзовую статую Афины Промахос («Победительницы в битвах»), воздвигнутую здесь около 456 года до н. э. в ознаменование победы над персами. Он создал также две грандиозные статуи из золота и слоновой кости: Афины Парфенос («Девы») для Парфенона на Акрополе (446–438 годы до н. э.) и Зевса Олимпийского (для храма Зевса в Олимпии, около 430 года до н. э.), которого считали одним из семи чудес света. При всей монументальности его образов, порой (подобно 9-метровой Афине Парфенос или 13-метровому Зевсу Олимпийскому) беспрецедентных по величине для Греции того времени, им была свойственна строгая уравновешенность и гармония пластических контрастов, основанная на Золотом сечении, что составляло суть классического стиля в период его высшего расцвета.

Уравнение (1.2) часто называют *уравнением золотой пропорции*.

Заметим, что на отрезке AB существует еще одна точка D (рис. 1.1), которая делит его «Золотым сечением», так как

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AD}{DB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

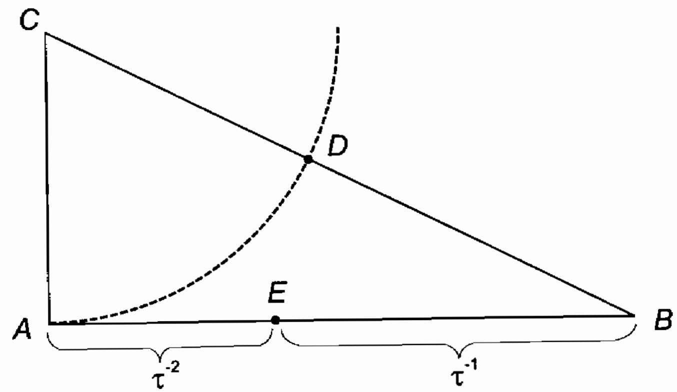


Рис. 1.2. Геометрическое построение Золотого сечения

Способ геометрического построения Золотого сечения

Золотое сечение широко встречается в геометрии. Из «Начал» Евклида известен следующий способ геометрического построения Золотого сечения с использованием линейки и циркуля (рис. 1.2).

Построим прямоугольный треугольник ABC со сторонами $AB = 1$ и $AC = 0{,}5$.

Тогда в соответствии с теоремой Пифагора:

$$CB = \sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Проведя дугу AD с центром в точке C до пересечения с отрезком CB в точке D, мы получим:

$$BD = CB - CD = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \tau^{-1}.$$

Проведя дугу DB с центром в точке B до ее пересечения с отрезком AB в точке E, мы получим деление отрезка AB в точке E Золотым сечением, поскольку

$$\frac{AB}{EB} = \frac{EB}{AE} = \tau \text{ или } AB = 1 = EB = AE = \tau^{-1} + \tau^{-2}.$$

Таким образом, хорошо известный в древнем мире простой прямоугольный треугольник с отношением катетов 1 : 2 мог послужить основой для открытия *теоремы квадратов (теоремы Пифагора)*, *Золотого сечения* и, наконец, *несоизмеримых отрезков* — трех великих математических открытий, приписываемых Пифагору.

«Двойной» квадрат

Многие математические закономерности, как говорится, лежали на поверхности, их нужно было только увидеть человеку с аналитическим умом, мыслящему логически, чем и отличались античные философы и математики. Не исключено, что древние математики могли прийти к Золотому сечению, исследуя так называемый простейший прямоугольник с отношением сторон 2 : 1, называемый также «двойным» или «двухсмежным» квадратом, так как он состоит из двух квадратов (рис. 1.3).

Если вычислить диагональ DB «двойного» квадрата, то в соответствии с теоремой Пифагора она равна

$$DB = \sqrt{5}.$$

Если теперь взять отношение суммы отрезков $AD + DB$ к большей стороне AB *«двойного» квадрата, то мы придем к золотой пропорции, так как*

$$\frac{AD + DB}{AB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Парадоксально, но теорему Пифагора знает каждый школьник, в то время как с Золотым сечением знакомы далеко не все.

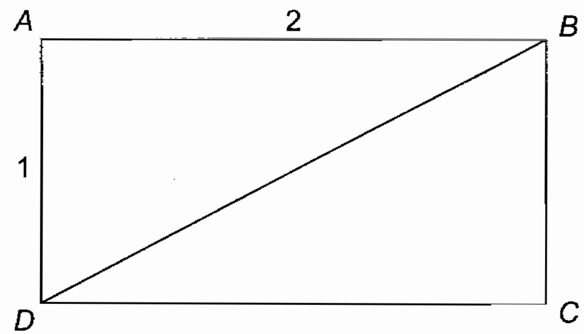


Рис. 1.3. Прямоугольник с отношением сторон 2 : 1 («двойной» квадрат)

Главная задача этой книги состоит в том, чтобы популярно рассказать об этом чудесном открытии античной науки всем, кто сохранил в себе умение удивляться и восхищаться. А современным ученым мы покажем далеко не тривиальные приложения Золотого сечения во многих областях современной науки. Мы расскажем вам о математическом открытии, которое в течение тысячелетий привлекало внимание и было предметом восхищения выдающихся ученых, математиков и философов прошлого: Пифагора, Платона, Евклида, Леонардо да Винчи, Луки Пачоли, Кеплера, Цейзинга, а в новейшее время — Флоренского, Гика, Корбюзье, Эйнштейна, американского математика Вернера Хогатта, создателя Ассоциации Фибоначчи, а также выдающегося ученого Алана Тьюринга, внесшего огромный вклад в развитие современной информатики.

1.3. Алгебраические свойства золотой пропорции

Замечательные тождества для золотой пропорции

Что же это за чудо природы и математики, интерес к которому не только не ослабевает с течением времени, а, наоборот, возрастает с каждым столетием?

Для ответа на этот вопрос мы предлагаем читателю напрячь все свои математические знания и погрузиться в мир математики. Только таким путем вы сможете насладиться чудесными математическими свойствами этого уникального феномена и через эти математические свойства понять и оценить всю красоту и гармонию золотой пропорции

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618.$$

Начнем с алгебраических свойств золотой пропорции. Из уравнения золотой пропорции (1.2) непосредственно вытекает первое очень простое и тем не менее весьма удивительное свойство золотой пропорции. Если корень τ (золотая пропорция) подставить вместо x в уравнение (1.2), то мы получим следующее замечательное тождество для золотой пропорции:

$$\tau^2 = \tau + 1. \qquad (1.3)$$

Убедимся, что тождество (1.3) является истинным. Для этого нам необходимо осуществить элементарные математические преобразования над левой и правой частями тождества (1.3) и доказать, что они совпадают.

Действительно, мы имеем для правой части:

$$\tau + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}.$$

С другой стороны,

$$\tau^2 = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+2\sqrt{5}+5}{4} = \frac{3+\sqrt{5}}{2},$$

откуда вытекает справедливость тождества (1.3).

Если члены тождества (1.3) разделить на τ, мы придем к следующему выражению для τ:

$$\tau = 1 + \frac{1}{\tau}, \qquad (1.4)$$

которое может быть представлено и в следующем виде:

$$\tau - 1 = \frac{1}{\tau}. \qquad (1.5)$$

Проанализируем тождество (1.5). Известно, что любое число a имеет *обратное* к нему число a^{-1}. Например, дробь 0,1 является числом, обратным к 10. Традиционный алгоритм получения обратного числа a^{-1} из исходного числа a состоит в делении числа 1 на число a. Это довольно сложная процедура. Попробуйте, например, путем деления получить число, обратное к числу a = 357821,093572. Это можно сделать только с помощью современного компьютера.

Рассмотрим теперь золотую пропорцию:

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Как получить из нее обратное число τ^{-1}? Выражение (1.5) дает очень простой ответ на этот вопрос. Для этого нам достаточно вычесть единицу из золотой пропорции τ. Действительно, с одной стороны:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2\times(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2\times(1-\sqrt{5})}{1^2-\sqrt{5}^2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

С другой стороны, как следует из (1.5), «обратное» число τ^{-1} может быть получено из τ следующим путем:

$$\frac{1}{\tau} = \tau - 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Но еще большее эстетическое наслаждение мы получим, если выполним над тождеством (1.3) следующие преобразования. Умножим вначале все члены тождества (1.3) на золотую пропорцию τ, а затем разделим их на τ.

В результате получим два новых тождества:

$$\tau^3 = \tau^2 + \tau;$$

$$\tau = 1 + \tau^{-1}. \qquad (1.6\text{–}1.7)$$

Если теперь продолжать умножать члены тождества (1.6) на τ, а члены тождества (1.7) делить на τ и устремить этот процесс к бесконечности, то мы придем к следующему изящному тождеству, связывающему степени золотой пропорции:

$$\tau^n = \tau^{n-1} + \tau^{n-1}, \qquad (1.8)$$

где число n является целым и пробегает значения в пределах от $+\infty$ до $-\infty$, то есть $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3\ldots$

Тождество (1.8) словесно можно выразить следующим образом: *«Любая целая степень золотой пропорции равна сумме двух предыдущих»*.

Это свойство золотой пропорции является воистину уникальным! Действительно, очень трудно представить, что следующее тождество является «абсолютно верным»:

$$\tau^{100} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{100} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{99} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{98}. \qquad (1.9)$$

Однако его справедливость однозначно вытекает из справедливости общего тождества (1.8).

Более того, абсолютно верным является также следующее тождество:

$$\tau^{100} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{100} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{99} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{97} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{96}. \qquad (1.10)$$

Подобных численных тождеств для числа τ^{100} существует бесконечное количество, что является следствием общего тождества (1.8).

Золотая геометрическая прогрессия

Рассмотрим последовательность степеней золотой пропорции, то есть

$$...\{..., \tau^{-n}, \tau^{-(n-1)}, ..., \tau^{-2}, \tau^{-1}, \tau^{0} = 1, \tau^{1}, \tau^{2}, ..., \tau^{n-1}, \tau^{n}...\}. \qquad (1.11)$$

Последовательность (1.11) обладает весьма интересным математическим свойством. С одной стороны, она является «геометрической прогрессией», в которой каждое число равно предыдущему, умноженному на постоянное для данной прогрессии число τ, называемое *знаменателем* геометрической прогрессии, то есть:

$$\tau^{n} = \tau \times \tau^{n-1}. \qquad (1.12)$$

С другой стороны, в соответствии с (1.8) последовательность (1.11) обладает «арифметическими» свойствами, так как каждое число ряда (1.11) есть сумма двух предыдущих. Заметим, что свойство (1.8) характерно только для геометрической прогрессии со знаменателем τ, и такая геометрическая прогрессия называется *золотой прогрессией*.

Поскольку в геометрии каждой геометрической прогрессии типа (1.11) соответствует некоторая *логарифмическая спираль*, то, по мнению многих исследователей, свойство (1.8) выделяет золотую прогрессию (1.11) среди других геометрических прогрессий и является причиной широкого распространения именно золотой логарифмической спирали в формах и структурах живой природы.

Представление золотой пропорции в виде цепной дроби

Докажем теперь еще одно удивительное свойство золотой пропорции, основываясь на тождестве (1.4). Если в правую часть выражения (1.4) вместо τ подставить его значение, задаваемое тем же выражением (1.4), то мы придем к представлению τ в виде следующей «многоэтажной» дроби:

$$\tau = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\tau}}.$$

Если продолжить такую подстановку в правой части бесконечное число раз, то в результате получим «многоэтажную» дробь с бесконечным количеством «этажей»:

$$\tau = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+...}}}}. \qquad (1.13)$$

Представление (1.13) в математике называется *непрерывной* или *цепной* дробью. Заметим, что теория цепных дробей является одной из важных частей современной математики.

Представление золотой пропорции в радикалах

Рассмотрим теперь еще раз тождество (1.3). Если взять корень квадратный из правой и левой частей тождества (1.3), то получим следующее выражение для τ:

$$\tau = \sqrt{1+\tau}. \qquad (1.14)$$

3—2391

Если теперь в правой части выражения (1.14) вместо τ подставить его же выражение, задаваемое (1.14), то получим следующее:

$$\tau = \sqrt{1+\sqrt{1+\tau}}. \qquad (1.15)$$

Если в правой части тождества (1.15) опять подставить выражение (1.14) вместо τ и повторить эту операцию бесконечное число раз, то мы получим еще одно замечательное представление золотой пропорции в радикалах:

$$\tau = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}}}. \qquad (1.16)$$

Каждый математик интуитивно стремится выразить свои математические результаты в наиболее простой, компактной форме. И если такую форму удается найти, то это доставляет математику эстетическое наслаждение. В этом отношении (стремление к «эстетическому» выражению математических результатов) математическое творчество подобно творчеству композитора или поэта, главной задачей которых является получение совершенных музыкальных или поэтических форм, доставляющих эстетическое удовольствие. Заметим, что формулы (1.13) и (1.16) доставляют нам эстетическое наслаждение и вызывают неосознанное чувство ритма и гармонии, когда мы начинаем задумываться над бесконечной повторяемостью одних и тех же простых математических элементов в формулах для τ, задаваемых (1.13), (1.16).

1.4. Уравнение золотой пропорции

Многочлены и уравнения

Издавна изучение *многочленов* и способов решения *алгебраических уравнений* привлекало особое внимание математиков; эта важнейшая математическая задача способствовала развитию алгебры.

Как известно, *многочленом* или *полиномом n-й* степени от x называется выражение вида:

$$a_n x^n + \ldots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0,$$

где $a_n \neq 0$.

Иными словами, многочлен — это сумма целочисленных степеней некоторой величины, взятых с заданными коэффициентами. К примеру, десятичная запись числа есть, по сути, представление числа в виде многочлена от 10.

Например, $365 = 3 \times 10^2 + 6 \times 10 + 5$. Если x — это переменная величина (значение не задано), то многочлену от x соответствует некоторая *полиномиальная функция*, область определения которой совпадает с множеством значений, принимаемых x. Многочлены степеней 1, 2, 3, 4 называются соответственно *линейными, квадратными, кубическими* и *биквадратными*.

Алгебраическое уравнение (в стандартной форме) — это записанное в алгебраических обозначениях утверждение о том, что некоторая полиномиальная функция обращается в нуль при некоторых требующих отыскания значениях переменной. Например, $x^2 - 5x + 6 = 0$ — *алгебраическое уравнение. Значения переменной, при которых многочлен обращается в нуль, называются корнями* этого многочлена.

Например, многочлен $x^2 - 5x + 6$ имеет корни 2 и 3, так как $2^2 - 5 \times 2 + 6 = 0$ и $3^2 - 5 \times 3 + 6 = 0$. Заметим, однако, что в многочлене $x^2 - 5x + 6$ переменная x означает любое число из области определения функции; в уравнении $x^2 - 5x + 6 = 0$, *напротив*, x означает лишь числа, удовлетворяющие уравнению, то есть превращающие его в тождество, а именно числа 2 и 3.

Алгебраические уравнения всегда служили мощным средством решения практических задач. Точный язык математики позволяет просто выразить факты и соотношения, которые, будучи изложенными обычным языком, могут показаться запутанными и сложными. Неизвестные величины, обозначаемые в задаче символами, например x, можно найти, сформулировав задачу на математическом языке в виде уравнений. Методы решения уравнений составляют в основном предмет того раздела математики, который называется *теорией уравнений*.

Напомним основные сведения о линейных и квадратных алгебраических уравнениях, хорошо известных нам из средней школы. *Линейное уравнение* в общем виде записывают как $ax + b = 0$, где a и b — некоторые числа, причем $a \neq 0$. Оно имеет единственное решение $x = -b/a$, то есть линейное уравнение имеет ровно один корень. *Квадратное уравнение* имеет вид:

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (1.17)$$

где $a \neq 0$.

Правила решения алгебраических уравнений 1-й и 2-й степени были известны еще в глубокой древности. Например, из курса математики средней школы нам хорошо известна формула для вычисления корней квадратного уравнения (1.17):

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (1.18)$$

Напомним, что значения корней зависят от *детерминанта* D квадратного уравнения (1.17), который определяется следующей формулой:

$$D = b^2 - 4ac. \quad (1.19)$$

Если детерминант D положителен, то формула (1.18) дает ровно два действительных корня. Если $D = 0$, то $x = -b/2a$, и мы говорим, что уравнение имеет два равных корня. Если же D отрицателен, то нам приходится вводить мнимую единицу i, определяемую как квадратный корень из -1, и оба корня уравнения становятся комплексными.

О квадратичных иррациональностях

Открытие *иррациональных чисел* является крупнейшим открытием греческой математики. Считается, что это открытие было сделано в V веке до н. э научной школой Пифагора при исследовании отношения диагонали к стороне квадрата. Методом от противного пифагорейцам удалось доказать, что рассматриваемое отношение, равное $\sqrt{2}$, не может быть выражено в виде отношения двух натуральных чисел, и такие отрезки были названы *несоизмеримыми*, а числа, выражающие подобные отношения, были названы *иррациональными*.

Открытие «несоизмеримых отрезков» привело к первому кризису в основаниях математики и, в конечном итоге, стало поворотным пунктом в ее развитии. Как гласит легенда, в честь этого открытия Пифагор совершил «гекатомбу», то есть принес в жертву богам 100 быков. Вначале пифагорейцы старались держать в секрете новое открытие. Согласно легенде, один из пифагорейцев — Гиппас Метапонтский, разгласивший секрет этого открытия, погиб во время кораблекрушения, что рассматривалось пифагорейцами как наказание от богов за разглашение тайны открытия. Это открытие по своему влиянию на развитие науки сравнивают даже с открытием Лобачевским неевклидовой геометрии в первой половине XIX века и открытием Эйнштейном теории относительности в начале XX века. Благодаря этому открытию в математику вошло принципиально новое понятие — *иррациональные числа*.

Термин «рациональное» происходит от латинского слова *ratio* — отношение, которое является переводом греческого слова «логос». Рациональным является число, которое может быть представлено как отношение двух целых чисел, выражающих однородные соизмеримые величины. В отличие от рациональных чисел, числа, выражающие отношение несоизмеримых отрезков, были названы *иррациональными* (по-гречески «алогос»).

В отличие от линейного уравнения, квадратное уравнение типа (1.17) с рациональными коэффициентами может иметь и иррациональные корни. Последние называются *квадратичными иррациональностями*. Изучению и классификации квадратичных иррациональностей посвящена самая трудная (10-я) книга «Начал» Евклида.

Ученые Индии, Ближнего и Среднего Востока, а также многие европейские математики Средних веков и нового времени занимались квадратичными иррациональностями. Было доказано, что любое число типа $\sqrt{N}$ для любого целого N, не являющегося полным квадратом, является иррациональным числом, так же как и число $\sqrt[3]{N}$, где N не является кубом и т. д. О таких иррациональных числах говорят, что они выражаются через радикалы.

В XVI веке итальянские математики Тарталья, Кардано и Феррари нашли общее выражение для корней кубических и биквадратных алгебраических уравнений, выражая их иррациональные корни через радикалы. Однако попытки найти общие формулы для корней алгебраических уравнений 5-й степени и выше оказались безуспешными, хотя именно эти попытки привели к новым математическим открытиям, связанным с именами Нильса Абеля и Эвариста Галуа.

Нищий «студиозиус» Нильс Абель

История науки и математики содержит в себе много трагических страниц. Одна из них — это жизнь и творчество выдающегося норвежского математика Нильса Абеля, математические исследования которого касались алгебры и решения алгебраических уравнений.

Долгое время считали, что иррациональный корень любого алгебраического уравнения с рациональными коэффициентами можно выразить через радикалы. Лишь в 20-х годах XIX века норвежский математик Нильс Абель доказал, что иррациональные корни общих уравнений выше 4-й степени не могут быть выражены через радикалы.

На веб-сайте Омского государственного университета в разделе «Математика в лицах» авторы нашли очень много интересной биографической информации о жизни выдающихся математиков, которая использована в нашей книге. Мы благодарим авторов сайта за прекрасную подборку материала.

На большой площади города Осло, столицы Норвегии, высится величественный памятник. По круто поднимающейся гранитной глыбе молодой человек с одухотворенным лицом шагает ввысь, переступая через два отвратительных чудовища. Это памятник знаменитому норвежскому математику Нильсу Хенрику Абелю. Что символизируют эти чудовища? Математики, шутя, говорят, что они изображают уравнения пятой степени и эллиптические функции, побежденные Абелем. Другие утверждают, что это аллегория: скульптор хотел воплотить в этом образе социальную несправедливость, с которой всю жизнь боролся Абель.

Нильс Хенрик Абель (1802–1829)

Фрагмент памятника Нильсу Абелю в Осло

Бесконечно печальная история жизни гениального норвежца типична для научных гениев не только его страны и его времени. В ней, как солнце в капле воды, отражена судьба выходца из народа, одаренного живой душой и талантом, столкнувшегося с социальной несправедливостью и свирепыми законами общества. К сожалению, судьба очень многих математических гениев складывалась трагически. Это связано с тем, что современники (даже великие математики) на начальном этапе очень часто оказывались не способными понять и по достоинству оценить великие математические открытия своих гениальных современников. Только после смерти гения к нему приходит заслуженное признание.

Абель родился в 1802 году на северо-западном побережье Норвегии в небольшом рыбацком городке Финней, где не было ни математиков, ни нужных ему книг. О первых годах его детства почти ничего не известно. Тринадцати лет он поступил в школу в Осло. Его отец, пастор Абель, видимо, неплохо подготовил сына. Первое время он занимался без труда и получал хорошие отметки, а по математике иногда отличные. Любил играть в шахматы, посещать театр. Но среди первых учеников он не значился. Однако через три года школьной жизни у шестнадцатилетнего Нильса наступил перелом.

Вместо жестокого учителя математики, избивавшего учеников, в школу приехал новый учитель Хольмбое, хорошо знавший свой предмет и умевший заинтересовать учеников. Хольмбое предоставил каждому ученику действовать самостоятельно и поощрял тех, кто делал первые шаги в овладении математикой. Очень скоро Абель не только искренне увлекся этой наукой, но и обнаружил, что в состоянии справиться с такими задачами, которые другим не под силу.

Семья Абеля жила в крайней бедности, и в школе Нильс обучался бесплатно. В 1820 году умер отец Нильса, и семья осталась без всяких средств. Положение было безвыходное. Нильс подумывал о возвращении в родной город и о поисках работы. Но на дарование юноши обратили внимание профессора, которые помогли Абелю поступить в университет. Несколько профессоров устроили складчину и образовали своего рода стипендию, чтобы сохранить редкий для науки талант. Затем им удалось выхлопотать стипендию для поездки Абеля за границу.

Пребывание Абеля в Берлине и Париже и в других крупных математических центрах того времени вызвало к жизни целый ряд его блестящих работ. Однако все его открытия настолько опережали науку того времени, что работы молодого математика не были поняты и оценены современниками. За границей, как и на родине, Абель испытывал жестокую нужду и постоянное чувство невыносимого одиночества. Попытки добиться признания ни к чему не привели: его работы, посланные в Парижскую академию и переданные на отзыв крупнейшему французскому математику Коши, были потеряны, письмо знаменитому немецкому математику Гауссу осталось без ответа.

Молодой математик, совершивший переворот в науке, вернулся на родину таким же бедным, никому не известным «студиозусом» Абелем, каким уехал. Ему не удалось найти работу. Больной туберкулезом, «бедный, как церковная мышь», по его собственным словам, двадцатишестилетний Абель в состоянии самой черной меланхолии скончался 6 апреля 1829 года.

Наиболее важным математическим открытием Абеля является доказательство неразрешимости в радикалах алгебраических уравнений 5-й степени.

Это открытие он сделал в очень юном возрасте, когда ему было всего 22 года. По словам известного математика Ш. Эрмита, Нильс Абель оставил столь богатое наследие математикам, что им будет чем заниматься в ближайшие 500 лет. Самое известное открытие Абеля относится к области алгебры: в 1824 году он доказал, что алгебраические уравнения 5-й степени и выше в общем случае неразрешимы в радикалах, а также привел частные типы уравнений, которые имеют такие решения (их назвали абелевыми группами).

Существует обычай, по которому новые результаты и открытия называют по имени того, кем они сделаны. Сейчас каждый, кому случится взять в руки книгу по высшей математике, увидит, что имя Абеля увековечено в самых различных областях этой науки: существует целый ряд теорем, носящих имя Абеля, есть абелевы интегралы, абелевы уравнения, абелевы группы, формулы Абеля, преобразования Абеля...

Как бы удивился нищий «студиозус» Нильс Абель, умерший от чахотки в возрасте 26 лет, если бы узнал, что его работы оказали такое громадное влияние на развитие математики!

Математик и революционер Эварист Галуа

Эварист Галуа (1811–1832)

Не менее трагичной является судьба еще одного гения, французского математика Эвариста Галуа. Он родился 26 октября 1811 года в местечке Бур-ла-Рен близ Парижа.

В 1823 году после основательной домашней подготовки под руководством матери он поступил в четвертый класс лицея Людовика Великого в Париже.

Свою первую работу, посвященную периодическим непрерывным дробям, Галуа опубликовал в 1828-м, еще будучи учеником лицея. Он намеревался поступить в Политехническую школу, но дважды проваливался на вступительном экзамене по математике. Сам он объяснял это тем, что заданные ему вопросы были слишком детскими, чтобы отвечать на них. Наконец, в 1830-м он был принят в Нормальную школу, но в 1831-м исключен из нее за «непозволительное поведение». В особенности Галуа ставилось в вину его «невыносимое высокомерие».

Галуа с энтузиазмом занялся революционной деятельностью и в конце концов попал в тюрьму, где пробыл несколько месяцев. Уже в мае 1832 года его бурная жизнь подошла к концу: он был убит на дуэли, в которую его вовлекла какая-то любовная история. Накануне дуэли он написал резюме своих открытий и передал записку одному из друзей с просьбой сообщить о них ведущим математикам. Записка заканчивалась словами:

> «Ты публично попросишь Якоби или Гаусса дать заключение не о справедливости, а о значении этих теорем. После этого, я надеюсь, найдутся люди, которые сочтут нужным расшифровать всю эту путаницу».

Насколько известно, письмо Галуа не попало ни к Якоби, ни к Гауссу. Математические круги узнали о нем лишь в 1846 году, когда известный французский математик Лиувилль напечатал большую часть трудов ученого в своем журнале. Все они занимали лишь 60 страниц небольшого формата, а содержали изложение теории групп, которая сейчас считается ключевой теорией современной алгебры и геометрии и первую классификацию иррациональностей, определяемых алгебраическими уравнениями, — учение, которое сейчас кратко называется *теорией Галуа*. В теории Галуа прояснялись такие старые вопросы, как трисекция угла, удвоение куба, решение кубических и биквадратных уравнений и уравнений любых степеней в радикалах. Им найдены условия сводимости решения таких уравнений к решению системы других алгебраических уравнений более низких степеней.

Уравнения золотой пропорции *n*-й степени

А теперь, после столь основательной математической подготовки, мы вновь обратимся к уравнению золотой пропорции (1.2). Ясно, что оно является квадратичным алгебраическим уравнением типа (1.17), коэффициенты которого соответственно равны:

$$a = 1; b = -1; c = -1. \qquad (1.20)$$

В соответствии с (1.19) вычислим детерминант уравнения (1.2), используя (1.20):

$$D = 5.$$

Отсюда вытекает, что уравнение (1.2) имеет два действительных корня, а именно:

$$x_1 = \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}; x_2 = -\frac{1}{\tau} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}. \qquad (1.21)$$

Один из них, x_1 — это золотая пропорция τ.

Обычно главный вопрос, который решается в теории алгебраических уравнений, состоит в том, чтобы найти корни данного алгебраического уравнения. А теперь мы поставим другой вопрос. Нам известно простейшее алгебраическое уравнение (1.2), корнем которого является золотая пропорция. Поставим следующий вопрос: а существуют ли алгебраические уравнения более высоких степеней, корнем которых является золотая пропорция? И если да, то какую форму они имеют? Для ответа на этот вопрос проведем следующие рассуждения, взяв в качестве исходного уравнение золотой пропорции, задаваемое (1.2).

Умножим обе части уравнения (1.2) на x; в результате получим следующее равенство:

$$x^3 = x^2 + x. \qquad (1.22)$$

Уравнение (1.2) можно переписать следующим образом:

$$x = x^2 - 1.$$

Теперь, подставляя это значение для переменной x в выражение (1.22), мы получим следующее алгебраическое уравнение 3-й степени:

$$x^3 = 2x^2 - 1. \qquad (1.23)$$

С другой стороны, если в выражение (1.22) подставить выражение для x^2, задаваемое (1.2), то мы получим еще одно уравнение 3-й степени:

$$x^3 = 2x + 1. \qquad (1.24)$$

Таким образом, мы получили два новых алгебраических уравнения 3-й степени.

Докажем, например, что корнем уравнения (1.23) является золотая пропорция.

На всякий случай напомню, что золотая пропорция выражается формулой

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Подставим золотую пропорцию в левую и правую часть уравнений (1.23) и проверим, что левые и правые части этого уравнения совпадают.

Действительно, используя тождество (1.8), мы имеем для правой части:

$$\tau^3 = \tau^2 + \tau = \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{4+2\sqrt{5}}{2}.$$

С другой стороны, для левой части этого уравнения мы имеем:

$$2\tau^2 - 1 = 2 \times \frac{3+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{4+2\sqrt{5}}{2}.$$

Таким образом, золотая пропорция τ, действительно, является корнем уравнения (1.23), то есть это уравнение является «золотым».

Точно так же можно доказать, что уравнение (1.24) также является «золотым».

Выведем теперь выражение для «золотого» алгебраического уравнения 4-й степени. Для этого умножим все члены равенства (1.22) на x; в результате получим следующее равенство:

$$x^4 = x^3 + x^2. \tag{1.25}$$

Затем мы можем воспользоваться выражением (1.2) для x^2 и выражениями (1.23) или (1.24) для x^3. Подставляя их в выражение (1.25), мы получим два новых алгебраических уравнения 4-й степени, корнями которых является золотая пропорция:

$$x^4 = 3x^2 - 1;$$

$$x^4 = 3x + 2. \tag{1.26–1.27}$$

Анализ уравнения (1.27) приводит нас к неожиданному результату. Оказывается, это уравнение описывает энергетическое состояние молекулы бутадиена — ценного химического вещества, которое используется при производстве каучука. Известнейший американский физик, лауреат Нобелевской премии Ричард Фейнман выразил свое восхищение по поводу уравнения (1.27) в следующих словах:

> «Какие чудеса существуют в математике! Согласно моей теории золотая пропорция древних греков дает минимальное энергетическое состояние молекулы бутадиена».

Этот факт сразу же повышает наш интерес к уравнениям золотой пропорции высших степеней, которые, возможно, описывают энергетические состояния молекул других физических веществ.

Эти уравнения могут быть получены, если мы будем последовательно рассматривать равенства типа $x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$. В качестве примера можно вывести следующие «золотые» уравнения высших степеней:

$$x^5 = 5x^2 - 2 = 5x + 3;$$

$$x^6 = 8x^2 - 3 = 8x + 5;$$

$$x^7 = 13x^2 - 5 = 13x + 8.$$

Анализ этих уравнений показывает, что числовые коэффициенты в правой части этих уравнений есть не что иное, как знаменитые *числа Фибоначчи*, которые мы рассмотрим ниже.

Легко показать, что в общем случае алгебраические уравнения золотой пропорции n-й степени выражаются в следующем виде:

$$x^n = F_n x^2 - F_{n-2} = F_n x + F_{n-1}, \tag{1.28}$$

где F_n, F_{n-1}, F_{n-2} — числа Фибоначчи.

В главе 2 настоящей книги мы будем детально изучать так называемые числа Фибоначчи 1, 1, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ... Это одна из наиболее удивительных числовых последовательностей, открытая в XIII веке известным итальянским математиком Фибоначчи. Там же мы узнаем, что эта числовая последовательность тесно связана с золотой пропорцией.

Заметим еще раз, что главным математическим свойством всех уравнений типа (1.28) является то, что все они имеют общий корень — золотую пропорцию.

Таким образом, наши достаточно элементарные рассуждения привели нас к небольшому математическому открытию: мы нашли бесконечное число новых алгебраических уравнений, задаваемых (1.28), корнем которых является золотая пропорция. Если теперь подставить вместо x в уравнение (1.28) его корень

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

то получим следующее замечательное тождество, связывающее золотую пропорцию с числами Фибоначчи:

$$\tau^n = F_n\tau^2 - F_{n-2} = F_n\tau + F_{n-1}. \tag{1.29}$$

Ниже мы узнаем, что, например, 18-е, 19-е и 20-е числа Фибоначчи соответственно равны:

$$F_{18} = 2584;\ F_{19} = 4181;\ F_{20} = 6765. \tag{1.30}$$

Но тогда с учетом (1.30), используя (1.28), мы можем записать следующие «золотые» алгебраические уравнения 20-й степени:

$$x^{20} = 6765x^2 - 2584; \tag{1.31}$$

$$x^{20} = 6765x + 4181. \tag{1.32}$$

Трудно вообразить, что корнем этих уравнений 20-й степени является золотая пропорция! Но это вытекает из рассмотренной выше теории алгебраических уравнений золотой пропорции, задаваемых (1.28). И глядя на уравнения (1.28), (1.31), (1.32), мы

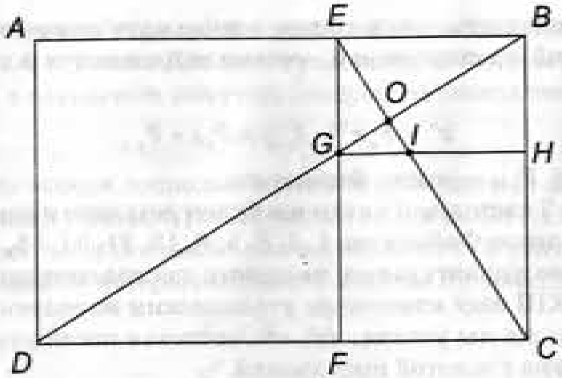


Рис. 1.4. Золотой прямоугольник

еще раз можем убедиться в величии математической науки, которая позволила нам в такой компактной форме передать сложную научную информацию.

1.5. Золотой прямоугольник

Свойства золотого прямоугольника

Золотое сечение очень широко используется в геометрии. Мы начнем наше путешествие по геометрическим свойствам Золотого сечения с *золотого прямоугольника* (рис. 1.4), который имеет следующее геометрическое определение. Золотым называется прямоугольник, в котором отношение большей стороны к меньшей равно золотой пропорции, то есть

$$\frac{AB}{BC} = \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Рассмотрим теперь случай простейшего золотого прямоугольника, в котором $AB = \tau$ и $BC = 1$.

Найдем теперь на отрезках AB и DC точки E и F, которые делят соответствующие стороны AB и DC в Золотом сечении. Ясно, что $AE = DF = 1$, тогда $EB = AB - AE = \tau - 1 = \tau^{-1}$.

Соединим теперь точки E и F отрезком EF и назовем этот отрезок *золотой линией*. При этом с помощью золотой линии EF золотой прямоугольник $ABCD$ оказывается разделенным на два прямоугольника $AEFD$ и $EBCF$. Поскольку все стороны прямоугольника $AEFD$ равны между собой, то этот прямоугольник есть не что иное, как квадрат.

Рассмотрим теперь прямоугольник $EBCF$. Поскольку его большая сторона $BC = 1$, а меньшая $EB = 1/\tau$, отсюда следует, что их отношение $BC/EB = \tau$, и, следовательно, прямоугольник $EBCF$ является золотым! Таким образом, золотая линия EF расчленяет исходный золотой прямоугольник $ABCD$ на квадрат $AEFD$ и новый золотой прямоугольник $EBCF$.

Проведем теперь диагонали DB и EC золотых прямоугольников $ABCD$ и $EBCF$. Из подобия треугольников ABD, FEC, BCE вытекает, что точка G разделяет Золотым сечением диагональ DB. Проведем теперь новую золотую линию GH в золотом прямоугольнике $EBCF$. Ясно, что золотая линия GH разделяет золотой прямоугольник $EBCF$ на квадрат $GHCF$ и новый золотой прямоугольник $EBHG$. Повторяя многократно эту процедуру, мы получим бесконечную последовательность квадратов и золотых прямоугольников, которые в пределе сходятся к точке O.

Заметим, что такое бесконечное повторение одних и тех же геометрических фигур, то есть квадрата и золотого прямоугольника, вызывает у нас неосознанное эстетическое чувство ритма и гармонии. Считается, что именно это обстоятельство является причиной того, что многие предметы прямоугольной формы, с которыми человек имеет дело (спичечные коробки, зажигалки, книги, чемоданы), зачастую имеют форму золотого прямоугольника. Например, мы широко пользуемся кредитными карточками в нашей повседневной жизни, но не обращаем внимания на

Рис. 1.5. Кредитная карточка имеет форму золотого прямоугольника

то, что во многих случаях кредитные карточки имеют форму золотого прямоугольника (рис. 1.5).

1.6. Декагон: связь Золотого сечения с числом π

Доказано, что количество иррациональных (несоизмеримых) чисел бесконечно. Однако некоторые из них занимают особое место в истории математики, более того — в истории материальной и духовной культуры. Их значение состоит в том, что они выражают некоторые пропорции, отношения, имеющие универсальный характер и обнаруживающиеся в самых неожиданных местах.

Первое из них — это иррациональное число $\sqrt{2}$, равное отношению диагонали к стороне квадрата. Как упоминалось, с этим числом связано открытие так называемых несоизмеримых отрезков и история наиболее драматичного периода в античной математике, который привел к разработке теории иррациональностей и иррациональных чисел и в конечном счете — к созданию современной «непрерывной» математики.

Следующие два иррациональных числа — это число π, выражающее отношение длины окружности к ее диаметру, и «неперово число» e, являющееся основанием так называемых «натуральных логарифмов». Значение этих важнейших математических констант в математическом анализе состоит в том, что они «генерируют» главные классы «элементарных функций»: широко известные тригонометрические функции (число π), а также экспоненциальную функцию e^x, логарифмическую функцию $\log_e x$, наконец, гиперболические функции (число e). Числа π и e, то есть два главных числа, «господствующие над анализом», связывает следующее изящное соотношение:

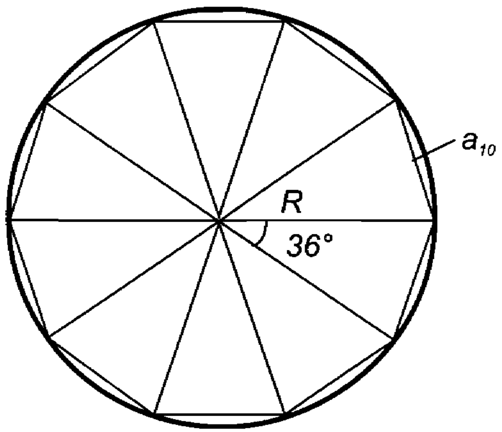


Рис. 1.6. Правильный десятиугольник («декагон»)

$$1+e^{i\pi}=1,$$

где $i=\sqrt{-1}$ — мнимая единица, еще одно необычное творение математической мысли.

Понять это тождество дано не каждому! И, рассматривая это тождество, которое с помощью мнимой единицы $i=\sqrt{-1}$ связывает между собой фундаментальные математические константы — числа π и e, трудно отделаться от мысли о мистическом характере происхождения этой математической формулы.

Золотая пропорция τ также относится к разряду фундаментальных математических констант. Но тогда возникает вопрос: существует ли какая-либо связь между этими математическим константами, например между числами π и τ? Ответ на этот вопрос дает анализ правильного многогранника, называемого *декагоном* (рис. 1.11).

Рассмотрим окружность радиусом R вместе с вписанным в окружность «декагоном» (рис. 1.6). Из геометрии известно, что сторона «декагона» a_{10} связана с радиусом R следующим соотношением:

$$a_{10}=2R\sin 18°. \tag{1.33}$$

Если выполнить некоторые тригонометрические преобразования на основе формул, хорошо известных нам из курса школьной тригонометрии, то мы получим следующие результаты:

1) Сторона правильного десятигранника, вписанного в круг радиуса R, равна большей части радиуса R, разделенного золотым сечением, то есть

$$a_{10}=\frac{R}{\tau}.$$

2) Золотая пропорция связана с числом π следующим соотношением:

$$\tau=2\cos 36°=2\cos\frac{\pi}{5}. \tag{1.34}$$

Эта формула, полученная в результате математического анализа геометрических пропорций «декагона», является еще одним важным свидетельством фундаментальности золотой пропорции, которая наряду с числом π по праву может быть причислена к разряду важнейших математических констант.

А теперь интересная информация из области атомной физики. Исследуя закономерности атомного ядра, белорусский физик Василий Петруненко в статье «Волновые кратности Золотого сечения во внутриядерном взаимодействии нуклонов» сделал вывод, что огромная стабильность и устойчивость атомных ядер достигается благодаря волновым кратностям Золотого сечения, лежащим в основе их организации. При этом он показывает, что именно декагон лежит в основе структуры атомного ядра!

1.7. Золотой прямоугольный треугольник и золотой эллипс

Золотой прямоугольный треугольник

В архитектуре широко используется один вид прямоугольного треугольника, основанного на Золотом сечении. Давайте рассмотрим прямоугольный треугольник ABC, в котором отношение катетов $AC/CB = \sqrt{\tau}$ (рис. 1.7).

Если теперь длины сторон прямоугольного треугольника ABC обозначить через x, y, z, а также учесть, что отношение $y/x = \sqrt{\tau}$,

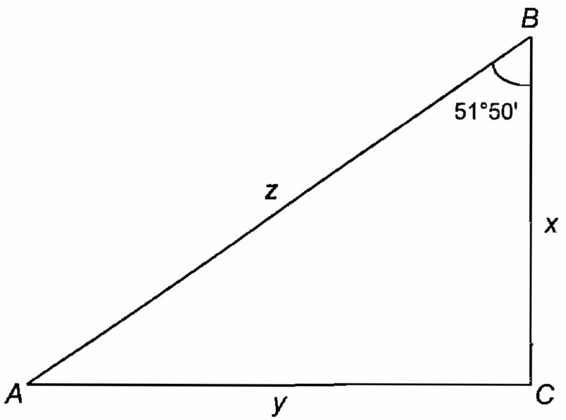


Рис. 1.7. Золотой прямоугольный треугольник

тогда в соответствии с теоремой Пифагора длина z может быть вычислена по формуле:

$$z = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1.35}$$

Если принять $x = 1$, $y = \sqrt{\tau}$, то

$$z = \sqrt{1+\tau} = \sqrt{\tau^2} = \tau.$$

Прямоугольный треугольник, в котором стороны относятся как $\tau : \sqrt{\tau} : 1$, называется *золотым прямоугольным треугольником*.

Ниже мы покажем, что именно золотой прямоугольный треугольник (рис. 1.7) является главной геометрической идеей пирамиды Хеопса.

Золотой эллипс

Золотой эллипс формируется с помощью двух ромбов $ACBD$ и $ICJD$, вписанных в эллипс (рис. 1.8). Золотые ромбы $ACBD$ и $ICJD$ состоят из четырех прямоугольных треугольников типа OCB или OCJ, которые являются золотыми прямоугольными треугольниками (рис. 1.7).

Рассмотрим теперь основные геометрические соотношения золотого эллипса на рис. 1.8. Пусть фокусное расстояние эллип-

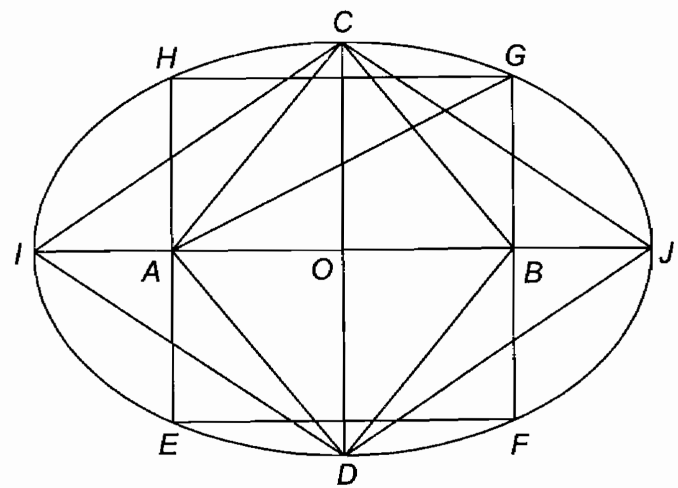


Рис. 1.8. Золотой эллипс

ных поверьях «ведьминой стопой», играла большую роль во всех магических науках и рассматривалась как средство защиты от злых духов, в частности для охраны спящего от ведьм и от производимого ими кошмара. В этой связи вспоминается одно место из гетевского «Фауста»:

Мефистофель. Нет, трудновато выйти мне теперь.
Тут кое-что мешает мне немного.
Фауст. Не пентаграмма ль этому виной?
Но как же, бес, пробрался ты за мной?
Каким путем впросак попался?
Мефистофель. Изволили ее вы плохо начертить,
И промежуток в уголку остался,
Там, у дверей, — и я свободно мог вскочить.

Как известно, Мефистофель был лишен возможности выйти из комнаты благодаря пентаграмме, расположенной на пороге так, что одна из вершин была направлена внутрь комнаты, а вершина противоположного вогнутого угла, вследствие несовершенства чертежа, содержала маленькое отверстие, так что дух мог только войти в комнату, а выйти никак не мог. После того как Мефистофель усыпил Фауста, который не хотел его выпустить, послушные ему мыши и крысы должны были прогрызть вершину неприкосновенной для него пентаграммы.

Много интересной информации о пентаграмме (пентакле) приведено в книге Дэна Брауна «Код да Винчи». Оказывается, пятиконечная звезда — это еще дохристианский символ, относившийся к поклонению и обожествлению Природы. Древние люди делили весь мир на две половины — мужскую и женскую. У них были боги и богини, сохраняющие баланс сил. Когда мужское и женское начала сбалансированы, в мире царит гармония. Когда баланс нарушается, возникает хаос. Пентакл символизирует женскую половину всего сущего на земле. Историки, изучающие религии, называют этот символ «священным женским началом» или «священной богиней». Пятиконечная звезда символизирует Венеру, богиню любви и красоты. Богиня Венера и планета Венера — это одно и то же. Богиня занимает свое место на ночном небе и известна под многими именами — Венера, Восточная звезда, Иштар, Астарте. И все они символизировали могущественное женское начало, связанное с Природой и Матерью Землей.

Каждые восемь лет планета Венера описывает абсолютно правильный пентакл по большому кругу небесной сферы. Древние люди заметили это явление и были так потрясены, что Венера и ее пентакл стали символами совершенства, красоты. Сегодня лишь немногие знают, что современные Олимпийские игры следуют половинному циклу Венеры. Еще меньше людей знают о том, что пятиконечная звезда едва не стала символом Олимпийских игр, но в последний момент его модифицировали: пять остроконечных концов звезды заменили пятью кольцами, по мнению организаторов, лучше отражающими дух участия и гармонию игр. Слово «Пентагон» нам хорошо известно также в связи с названием военного ведомства США, здание которого имеет форму пентагона (рис. 1.10).

Золотая чаша и золотой равнобедренный треугольник

Пентагон и пентакл на рис. 1.9 включают в себя ряд замечательных фигур, которые широко использовались в произведениях искусства. В античном искусстве широко известен так называемый закон золотой чаши (рис. 1.11), который использовали античные скульпторы и золотых дел мастера. Заштрихованная часть пентагона на рис. 1.11 дает схематическое представление золотой чаши.

Когда-то в Советском Союзе существовал Государственный Знак качества (рис. 1.13), в котором явно просматриваются мотивы золотой чаши.

Рис. 1.10. Здание Пентагона

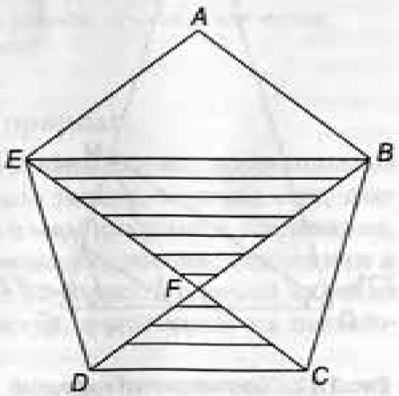


Рис. 1.11. Золотая чаша

Пентакл (рис. 1.9) состоит из пяти золотых равнобедренных треугольников, каждый из которых напоминает букву «А» («пять пересекающихся А»). Каждый золотой треугольник имеет острый угол $\angle A = 36°$ при вершине и два острых угла $\angle D = \angle C = 72°$ при основании треугольника. Основная особенность золотого равнобедренного треугольника состоит в том, что отношение каждого бедра $AC = AD$ к основанию DC равно золотой пропорции τ. Исследуя золотой треугольник как часть пентакла, пифагорейцы были восхищены, когда обнаружили, что биссектриса DH совпадает с диагональю DB пентагона (рис. 1.9) и делит сторону AC в точке H Золотым сечением (рис. 1.12). При этом возникает новый золотой треугольник DHC. Если теперь провести биссектрису угла H к точке H' и продолжить этот процесс до бесконечности, то мы получим бесконечную последовательность золотых треугольников.

Как и в случае с золотым прямоугольником и пентагоном, бесконечное возникновение одной и той же геометрической фигуры (золотого треугольника) после проведения очередной биссектрисы вызывает эстетическое чувство — восхищение ритмом и гармонией.

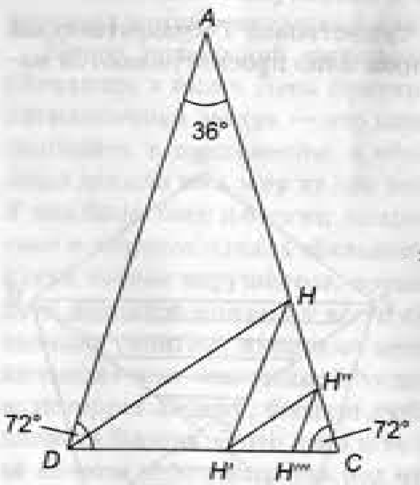


Рис. 1.12. Золотой равнобедренный треугольник

Рис. 1.13. Государственный знак качества СССР

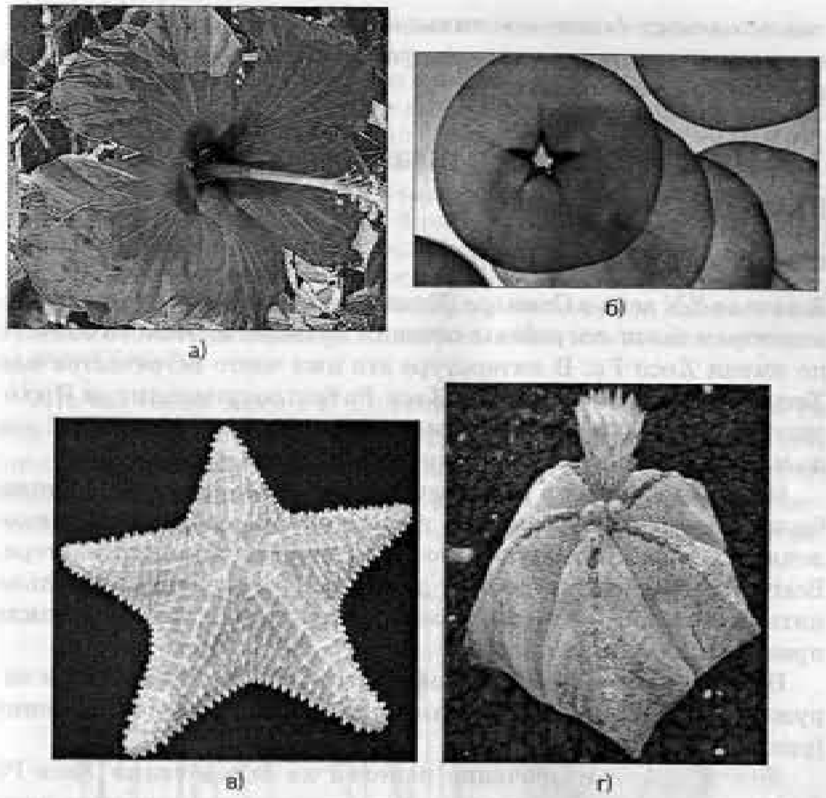


Рис. 1.14. Примеры пентагональной симметрии в природе:
а) — китайская роза, б) — яблоко в разрезе, в) — морская звезда, г) — кактус

Пентагональная симметрия в природе

В живой природе широко распространены формы, основанные на пентагональной симметрии (морские звезды, морские ежи, цветы). Пятилепестковыми являются цветы кувшинки, шиповника, боярышника, гвоздики, груши, черемухи, яблони, земляники и многих других цветков. На рис. 1.14 и рис. 1 цветной вклейки приведены примеры живых структур, основанных на пентагональной симметрии.

Наличия пяти пальцев на руке, а также пяти костей или костных зачатков на органах, соответствующих руке человека у многих животных («пентадактильность»), являются дополнительным свидетельством широкого распространения пятиугольных форм в биологическом мире.

1.9. Золотое сечение и тайны египетской культуры

Феномен Древнего Египта

В начале XX века в Саккаре (Египет) археологи вскрыли склеп, в котором были погребены останки древнеегипетского зодчего по имени Хеси-Ра. В литературе это имя часто встречается как Хесира. Предполагается, что Хеси-Ра был современником Имхотепа, жившего в период правления фараона Джосера (XXVII век до н. э.), так как в склепе обнаружены печати фараона.

Из склепа наряду с различными материальными ценностями были извлечены деревянные доски-панели, покрытые великолепной резьбой, которую исполнила рука настоящего мастера. Всего в склепе помещалось 11 досок; из них сохранилось только пять, а остальные панели, к сожалению, полностью разрушила проникшая в склеп влага.

На всех сохранившихся панелях изображен сам зодчий в окружении различных фигур, имеющих символическое значение (рис. 1.15).

Долгое время назначение панелей из захоронения Хеси-Ра было неясным. Вначале египтологи приняли эти панели за ложные двери. Однако, начиная с 60-х годов XX века, ситуация с панелями начала проясняться. В начале 60-х годов русский архитектор И. Шевелев обратил внимание на то, что на одной из панелей жезлы, которые зодчий держит в руках, соотносятся между собой как $1:\sqrt{5}$, то есть как малая сторона и диагональ квадрата с отношением сторон $1:2$ («двойного» квадрата). Именно это наблюдение стало исходной точкой для исследований другого русского архитектора — И. Шмелева, который провел тщательный геометрический анализ «панелей Хеси-Ра» и в результате пришел к сенсационному открытию, описанному в брошюре «Феномен Древнего Египта» (1993).

Но предоставим слово самому автору открытия:

«Но теперь после всестороннего и аргументированного анализа методом пропорций мы получаем достаточные основания утверждать, что панели

Хеси-Ра — это система правил гармонии, кодированная языком геометрии...

Итак, в наших руках конкретные вещественные доказательства, «открытым текстом» повествующие о высочайшем уровне абстрактного мышления интеллектуалов из Древнего Египта. Автор, резавший доски, с изумительной точностью, ювелирным изяществом и виртуозной изобретательностью продемонстрировал правило ЗС (Золотого сечения) в его широчайшем диапазоне вариаций. В результате была рождена ЗОЛОТАЯ СИМФОНИЯ, представленная ансамблем высокохудожественных произведений, не только свидетельствующих о гениальной одаренности их создателя, но и убедительно подтверждающих, что автор был посвящен в магические таинства гармонии. Этим гением был золотых дел мастер по имени Хеси-Ра».

Кто же такой Хеси-Ра? Древние тексты сообщают: Хеси-Ра был «начальник Дестиуса и начальник Бута, начальник врачей, писец фараона, жрец Гора, главный архитектор фараона, Верховный начальник десятки Юга и резчик». Анализируя перечисленные выше регалии Хеси-Ра, И. Шмелев особое внимание об-

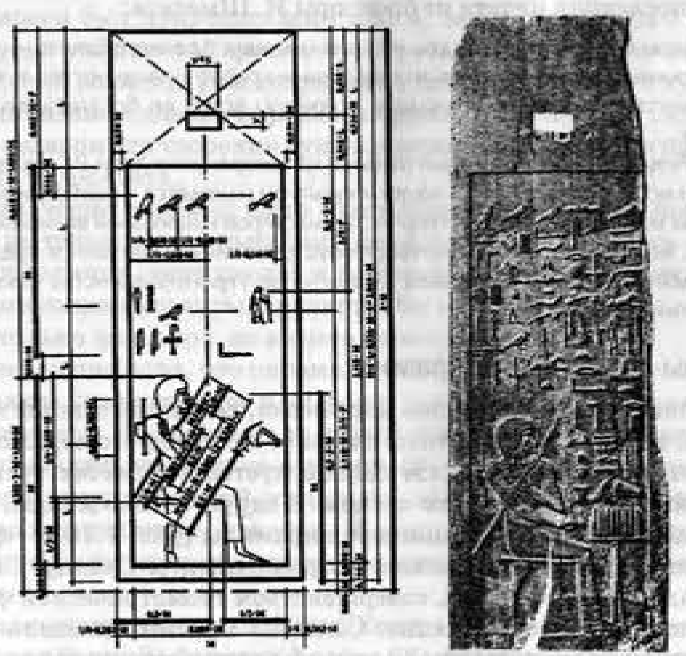


Рис. 1.15. Панели Хеси-Ра

ращает на тот факт, что архитектор Хеси-Ра был жрецом Гора. Ведь Гор в Древнем Египте считался богом гармонии и, следовательно, быть жрецом Гора значило исполнять функции хранителя гармонии.

Как вытекает из его имени, Хеси-Ра был посвящен в ранг бога Ра (бог Солнца). Шмелев предполагает, что это высокое посвящение было дано Хеси-Ра за разработку эстетических принципов в системе канона, отражающего гармонические основы мироздания.

> «Ставка на гармонический принцип открывала древнеегипетской цивилизации путь к небывалому расцвету культуры, подъем которой приходится как раз на время правления Джосера — период, когда полностью сложилась система письменных знаков. Поэтому не исключено, что пирамида Джосера стала первым экспериментальным сооружением, за которым — согласно программе, разработанной под руководством и при участии Хеси-Ра — следовало возведение цепи единого комплекса Великих пирамид в Гизе».

И последняя цитата из брошюры И. Шмелева:

> «Остается только признать, что цивилизация Древнего Египта — это суперцивилизация, которая изучена нами крайне поверхностно и требует качественно нового подхода к освоению всего ее богатейшего наследия...
>
> Результаты исследований панелей из захоронения Хеси-Ра доказывают, что истоки современной науки и культуры находятся в необозримых пластах истории, питающих творчество мастеров наших дней великими идеями, которые издавна одухотворяли устремления выдающихся представителей человечества. И наша задача — не утратить единства связующей нити».

Тайны египетских пирамид

Бесконечное, однообразное море песка, редкие высохшие кустики растений. Едва заметные следы от прошедшего верблюда заметает ветер. Раскаленное солнце пустыни кажется тусклым, словно покрытым мелким песком. И вдруг, словно мираж, перед изумленным взором возникают пирамиды (рис. 1.16) — фантастические фигуры из камня, устремленные к Солнцу. Своими громадными размерами, совершенством геометрической формы они поражают воображение. Согласно многим описаниям, эти гигантские монолиты имели раньше совершенно иной вид, чем в наше время. Они сияли на солнце белой глазурью отполирован-

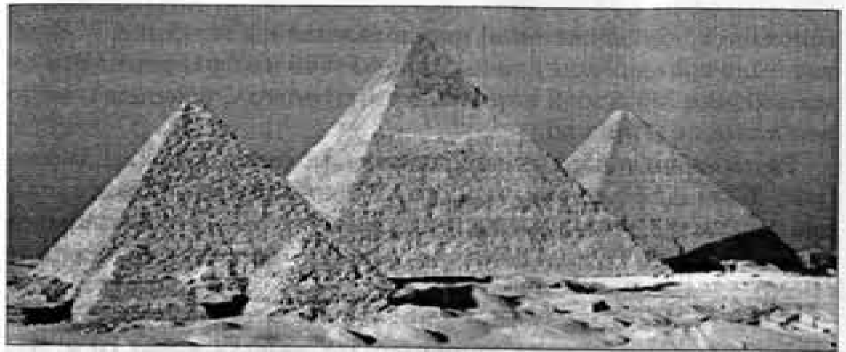


Рис. 1.16. Комплекс пирамид в Гизе

ных известняковых плит на фоне многоколонных прилегающих храмов. Рядом с царскими пирамидами стояли пирамиды жен и членов семьи фараонов.

Власть фараона в Древнем Египте была огромной, ему воздавали божественные почести, его называли «Большим Богом». Бог-фараон был покровителем страны, вершителем судеб народа. Культ умершего фараона приобретал огромное значение в египетской религии. Для сохранения тела фараона и его души и возвеличивания власти фараона сооружали гигантские пирамиды. И недаром эти творения рук человеческих относили к одному из семи чудес света.

Назначение пирамид было многофункциональным. Они служили не только усыпальницами фараонов, но и являлись атрибутами величия, могущества и богатства страны. Пирамиды — это памятники культуры, хранящие богатейшие сведения о жизни не только фараонов, но и всего народа.

Совершенно ясно, что пирамиды имели глубокое «научное содержание», воплощенное в их форме, размерах и расположении на местности. Каждая деталь пирамиды, каждый элемент формы выбирались тщательно и должны были продемонстрировать высокий уровень знаний создателей пирамид. Ведь они строились на тысячелетия, навечно. И недаром арабская пословица гласит: «Все на свете страшится времени, а время страшится пирамид».

Среди грандиозных пирамид Египта особое место занимает *Великая пирамида фараона Хеопса (Хуфу)*. Прежде чем приступить к анализу формы и размеров пирамиды Хеопса, следует вспомнить, какой системой мер пользовались египтяне. У египтян было три единицы длины: *локоть* (466 мм), равнявшийся семи *ладоням* (66,5 мм), которая, в свою очередь, равнялась четырем *пальцам* (16,6 мм).

Рассмотрим теперь геометрическую модель пирамиды Хеопса (рис. 1.17) и проведем анализ размеров пирамиды Хеопса, следуя рассуждениям, приведенным в замечательной книге украинского ученого Николая Васютинского «Золотая пропорция» (1990).

Большинство исследователей сходятся в том, что длина стороны основания пирамиды, например, GF, равна $L = 233{,}16$ м. Эта величина соответствует почти точно 500 локтям. Полное соответствие 500 локтям будет, если длину локтя считать 0,4663 м.

Высота пирамиды (H) оценивается исследователями различно — от 146,6 до 148,2 м. И в зависимости от принятой высоты пирамиды изменяются все отношения ее геометрических элементов. В чем причина различий в оценке высоты пирамиды? Дело в том, что, строго говоря, пирамида Хеопса является усеченной. Ее верхняя площадка в наши дни имеет размер примерно 10 × 10 м, а столетие назад она была равна 6 × 6 м. Очевидно, что вершину пирамиды разобрали и ее высота не равна первоначальной.

Оценивая высоту пирамиды, необходимо учитывать такой физический фактор, как осадка конструкции. За длительное время под воздействием колоссального давления (достигающего 500 тонн на 1 м^2 нижней поверхности) высота пирамиды уменьшилась по сравнению с первоначальной высотой.

Какой же была первоначальная высота пирамиды? Ее можно определить, если найти основную «геометрическую идею» пирамиды.

В 1837 году английский полковник Г. Вайз измерил угол наклона граней пирамиды: он оказался равным $\alpha = 51°51'$. Эта величина и сегодня признается большинством исследователей. Указанному значению угла отвечает тангенс ($\text{tg}\,\alpha$), равный 1,27306. Эта величина соответствует отношению высоты пирамиды AC к половине ее основания CB (рис. 1.17), то есть

$$\frac{AC}{CB} = \frac{H}{\frac{L}{2}} = \frac{2H}{L}.$$

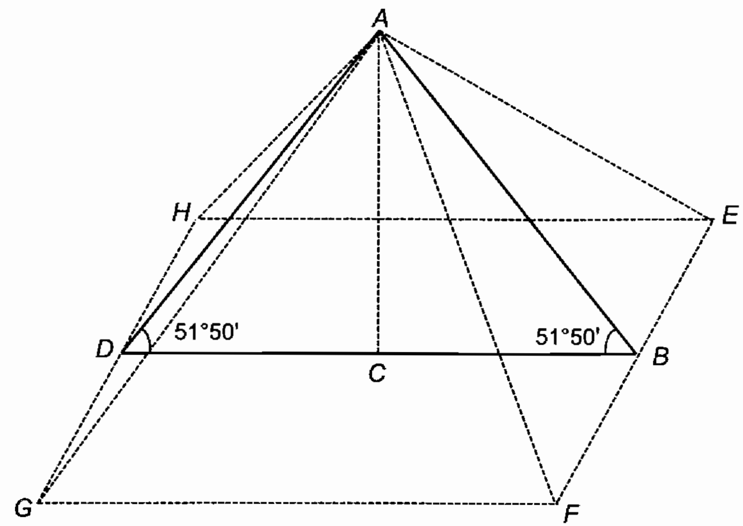


Рис. 1.17. Геометрическая модель пирамиды Хеопса

И вот здесь исследователей ожидал большой сюрприз!

Дело в том, что если взять корень квадратный из золотой пропорции $\sqrt{\tau}$, то мы получим следующий результат: $\sqrt{\tau} = 1{,}272$. Сравнивая эту величину с величиной $\text{tg}\,\alpha = 1{,}27306$, мы видим, что эти величины очень близки между собой.

Если же принять угол $\alpha = 51°50'$, то есть уменьшить его всего на одну угловую минуту, то величина α станет равной 1,272, то есть совпадет с величиной $\sqrt{\tau}$. Следует отметить, что в 1840 году Г. Вайз повторил свои измерения и уточнил, что значение угла $\angle\alpha = 51°50'$.

Эти измерения привели исследователей к следующей весьма интересной гипотезе: *в основу треугольника ACB пирамиды Хеопса было заложено отношение* $AC/CB = \sqrt{\tau} = 1{,}272$! Выше мы рассмотрели все математические пропорции подобного треугольника, названного золотым прямоугольным треугольником.

Если теперь принять за основу гипотезу о том, что основной «геометрической идеей» пирамиды Хеопса является золотой прямоугольный треугольник, то отсюда легко можно вычислить проектную высоту пирамиды Хеопса. Она равна:

$$H = \frac{L}{2} \times \sqrt{\tau} = 148{,}28 \text{ м}.$$

Выведем теперь некоторые другие отношения для пирамиды Хеопса, вытекающие из «золотой» гипотезы, в частности найдем отношение внешней площади пирамиды к площади ее основания. Для этого примем длину катета CB за единицу, то есть: $CB = 1$. Тогда длина стороны основания пирамиды $CB = 2$, а площадь основания $EFGH$ будет равна $SEFGH = 4$.

Вычислим теперь площадь боковой грани пирамиды Хеопса S_Δ. Поскольку высота AB треугольника AEF равна τ, то площадь боковой грани будет равна $S_\Delta = \tau$. Тогда суммарная площадь всех четырех боковых граней пирамиды будет равна 4τ, а отношение суммарной внешней площади пирамиды к площади основания будет равно золотой пропорции! Это и есть *главная геометрическая тайна пирамиды Хеопса*!

Анализ других египетских пирамид показывает, что египтяне всегда стремились воплотить в своих пирамидах некоторые важные математические знания. В этом отношении весьма интересной является пирамида Хефрена. Измерения пирамиды показали, что угол наклона боковых граней в ней равен 53°12′, что отвечает отношению катетов прямоугольного треугольника 4 : 3.

Такое отношение катетов соответствует известному прямоугольному треугольнику со сторонами 3 : 4 : 5, который называют «совершенным», «священным» или «египетским» треугольником.

По свидетельству историков, «египетскому» треугольнику придавали магический смысл. Плутарх писал, что египтяне сравнивали природу Вселенной со «священным» треугольником; они символически уподобляли вертикальный катет мужу, основание — жене, а гипотенузу — тому, что рождается от обоих.

Для треугольника 3 : 4 : 5 справедливо равенство $3^2 + 4^2 = 5^2$, которое выражает теорему Пифагора. Не эту ли теорему хотели увековечить египетские жрецы, возводя пирамиду на основе треугольника 3 : 4 : 5? Трудно найти более удачный пример для иллюстрации теоремы Пифагора, которая была известна египтянам задолго до ее открытия Пифагором.

Таким образом, гениальные создатели египетских пирамид стремились поразить далеких потомков глубиной своих знаний, и они достигли этого, выбрав в качестве «главной геометрической идеи» для пирамиды Хеопса — золотой прямоугольный треугольник, а для пирамиды Хефрена — «священный», или «египетский», треугольник.

1.10. Золотое сечение в греческой культуре

Озарение Пифагора

Пифагор
(569–475 годы до н. э.)

Пифагор едва ли не самая известная личность в истории науки. Это имя известно каждому человеку, изучавшему геометрию и знакомому с теоремой Пифагора — едва ли не самой известной теоремой геометрии.

Знаменитый философ и ученый, религиозный и этический реформатор, влиятельный политик, полубог в глазах своих учеников и шарлатан по отзывам некоторых из его современников, — таким изображают Пифагора в античной литературе. Об исключительной популярности Пифагора уже при жизни свидетельствуют монеты с его изображением, выпущенные в 430–420 годы до н. э. Для V века до н. э. это случай беспрецедентный! Пифагор первым из греческих философов удостоился специально посвященного ему сочинения.

Всемирно известна его научная школа, которую он организовал в Кротоне, греческой колонии на севере Италии. Школа Пифагора, или, как ее еще называют, «Пифагорейский союз», была одновременно и философской школой, и политической партией, и религиозным братством. Устав «Пифагорейского союза» был очень суровым. Каждый, кто вступал в него, отказывался от личной собственности в пользу союза, обязывался не проливать крови, не употреблять мясной пищи, беречь тайну учения своего учителя. Членам школы запрещалось обучать других за вознаграждение. Учение Пифагора и его учеников касалось гармонии, геометрии, теории чисел, астрономии. Но сами пифагорейцы более всего ценили результаты, полученные в области гармонии, ибо они подтверждали их идею, что «числа определяют все». Многие великие математические открытия приписывают Пифагору не совсем заслуженно. Например, знаменитая «теорема квадра-

5–2391

тов» (теорема Пифагора), задающая соотношение между сторонами прямоугольного треугольника, была известна египтянам, вавилонянам и китайцам задолго до Пифагора.

Однако главным математическим открытием пифагорейцев считается открытие *несоизмеримых отрезков*. Исследуя отношение диагонали к стороне квадрата, пифагорейцы доказали, что это отношение не может быть выражено в виде отношения двух натуральных чисел, то есть является «иррациональным». Это открытие вызвало первый кризис в истории математики. Кроме того, пифагорейское учение о целочисленной основе всего существующего после этого нельзя было признать истинным. Поэтому пифагорейцы пытались сохранить свое открытие в тайне и создали легенду о гибели Гиппаса Месопотамского, который осмелился разгласить это открытие. Пифагору приписывают также ряд других геометрических открытий, а именно: теорему о сумме внутренних углов треугольника; задачу о делении плоскости на правильные многоугольники (треугольники, квадраты и шестиугольники). Существует мнение, что именно Пифагор построил «космические» фигуры, то есть пять правильных многогранников. Иногда Пифагору приписывают и открытие Золотого сечения. Однако некоторые древние ученые уверяют, что это не так и что понятие о Золотом сечении Пифагор позаимствовал у вавилонян.

В чем же причина столь большой популярности Пифагора уже при его жизни? Ответ на этот вопрос дают некоторые интересные факты из его биографии, помещенные в «Биографическом словаре деятелей в области математики» (авторы А. И. Бородин и А. С. Бугай, 1979). В статье, посвященной Пифагору, отмечается:

> «По преданию, Пифагор, чтобы ознакомиться с мудростью восточных ученых, выехал в Египет и как будто прожил там 22 года. Хорошо овладев всеми науками египтян, в том числе и математикой, он переехал в Вавилон, где прожил 12 лет и ознакомился с научными знаниями вавилонских жрецов. Предания приписывают Пифагору посещение и Индии. Это очень вероятно, так как Иония и Индия тогда имели торговые связи. Возвратившись на родину (около 530 года до н. э.) Пифагор попытался организовать свою философскую школу. Однако по неизвестным причинам он вскоре оставляет Самос и селится в Кротоне (греческая колония на севере Италии). Здесь Пифагору удалось организовать свою школу, которая действовала почти тридцать лет».

То, что Пифагор действительно пробыл долгое время в Египте и получил там ранг «посвященного» в тайны египетской науки, подтверждается и другими источниками. Например, в книге Мэнли П. Холла «Энциклопедическое изложение масонской, герметической, каббалистической и розенкрейцеровской символической философии» (1992) в главе «Мистическое христианство» при описании истории Иисуса утверждается, что «Иисус, без сомнений, был посвящен в том же самом храме Мельхизедека, где за шесть веков до этого был посвящен Пифагор». Таким образом, выдающаяся роль Пифагора в развитии греческой науки состоит в выполнении исторической миссии по передаче знаний египетских и вавилонских жрецов ученым Древней Греции. Именно благодаря Пифагору, который был, без всякого сомнения, одним из наиболее образованных мыслителей своего времени, греческая наука получила огромный объем знаний в области философии, математики и естественных наук, которые, попав в благоприятную среду древнегреческой культуры, способствовали ее бурному развитию и приумножению.

Развивая идею об исторической роли Пифагора в развитии древнегреческой науки, Игорь Шмелев в своей брошюре «Феномен Древнего Египта» пишет следующее:

> «Известное всему миру имя кротонский учитель получил после обряда посвящения. Это имя составлено из двух половин и означает "прозревающий гармонию", ибо пифии в Древней Греции были жрицами-прорицательницами, а Гор в Древнем Египте олицетворял гармонию. Так, на закате цивилизации древнеегипетские жрецы, передавая сокровенные знания представителю набирающей силу цивилизации, символически скрепляли в одном лице союз мужского и женского начал — оплот гармонии».

Идея гармонии в греческой культуре

Идея гармонии, основанной на Золотом сечении, не могла не коснуться греческого искусства. Природа в своем широком понимании включала в себя творческий мир человека, искусство и музыку, где действовали те же законы ритма и гармонии. Предоставим слово Аристотелю:

> «Природа стремится к противоположностям и из них, а не из подобных вещей, образует созвучие... Она сочетала мужской пол с женским, а не каждый из них с однородным и, таким образом, первую общественную связь она образовала через соединение противоположностей, а не посредством подобного. Также и искусство, по-видимому, подражая При-

5*

роде, поступает таким же образом. А именно: живопись делает изображения, соответствующие оригиналам, смешивая белые, черные, желтые и красные краски; музыка создает единую гармонию, смешав в совместном пении различных голосов звуки высокие и низкие, протяжные и короткие; грамматика из смеси гласных и согласных... создала целое искусство».

Взять материал и исключить все лишнее — таков афористически запечатленный план ваятеля, вобравшего в себя всю серьезность философской мудрости античного мыслителя. И это главная идея греческого искусства, для которого Золотое сечение впервые стало некоторым эстетическим каноном. Основу искусства составляет теория пропорций. И, конечно же, вопросы пропорциональности не могли не заинтересовать Пифагора. Пифагор, возможно, первый из философов Греции, который старается математически разобрать существо гармонических пропорций. Пифагор знал, что интервалы октавы могут быть выражены числами, которые отвечают соответствующим колебаниям струны, и эти числовые отношения были положены Пифагором в основу музыкальной гармонии. Пифагору приписывают знание арифметической, геометрической и гармонической пропорций, а также закона Золотого сечения. Последнему Пифагор придавал особое, выдающееся значение, сделав пентаграмму, или пентакл, отличительным знаком своего «союза».

Платон, заимствуя пифагорейское учение о гармонии, также подчеркивает особое значение пропорций в теории гармонии:

«Две части или величины не могут быть удовлетворительно связаны между собой без посредства третьей; наиболее красивым связующим звеном является то, которое совместно с двумя первоначальными величинами дает наиболее совершенное единое целое. Достигается это наилучшим образом пропорцией (аналогией), в которой из трех чисел, плоскостей или тел, среднее так относится ко второму, как первое к среднему, а также второе к среднему как среднее к первому. Из этого следует, что среднее может заменить первое и второе, первое же и второе — среднее и все вместе таким образом составляет неразрывное единое целое».

Аристотель основными требованиями красоты выдвигает порядок, пропорциональность и ограниченность в размерах. Порядок возникает тогда, когда между частями целого возникают определенные соотношения, пропорции. В музыке Аристотель признает октаву наиболее красивым консонансом ввиду того, что число колебаний между основным тоном и октавой выражается первыми числами натурального ряда: 1 : 2. В поэзии, по его мнению, ритмические отношения стиха основаны на малых численных соотношениях, чем достигается красивое впечатление. Кроме простоты, основанной на соизмеримости отдельных частей и целого, Аристотель, как и Платон, признает высшую красоту правильных фигур и пропорции, основанной на Золотом сечении.

Не только философы Древней Греции, но и многие греческие художники и архитекторы уделяли значительное внимание достижению пропорциональности. И это подтверждается анализом архитектурных сооружений греческих зодчих. Фригийские гробницы и античный Парфенон, «Канон» Поликлета и Афродита Книдская Праксителя, наиболее совершенный греческий театр в Эпидавре и древнейший из дошедших до нас театр Диониса в Афинах — все это яркие образцы ваяния и творчества, исполненные глубокой гармонии на основе Золотого сечения.

Театр в Эпидавре построен Поликлетом Младшим в 40-ю Олимпиаду и рассчитан на 15 тысяч человек. Театрон (место для зрителей) делится на два яруса: первый имеет 34 ряда мест, второй — 21 (числа Фибоначчи!). Раствор угла, объемлющего пространство между театроном и скеной (пристройка для переодевания актеров и хранения реквизита), делит окружность основания амфитеатра в отношении $137°50'/222°50' = 0,618$ (золотая пропорция). Это соотношение реализовано практически во всех античных театрах. Данная пропорция у Витрувия, в его схематических изображениях такого рода построек, составляет 5 : 8, то есть рассматривается как отношение чисел Фибоначчи. Театр Диониса в Афинах трехъярусный. Первый ярус имеет 13 секторов, второй — 21 (числа Фибоначчи!). Отношение растворов углов, делящих окружность основания на две части, составляет ту же самую золотую пропорцию.

Три смежных числа из начального фрагмента ряда Фибоначчи 5, 8, 13 есть величины разностей между радиусами окружностей, лежащих в основании плана построения большинства театров. Ряд Фибоначчи служил как бы масштабной шкалой, где каждое число соответствует целым единицам аттического фута, но в то же время эти величины связаны между собой единой математической закономерностью. При построении храмов за основу брался человек как «мера всех вещей»: в храм он должен входить «с гордо поднятой головой». Его рост делился на 6 единиц (греческих футов), которые откладывались на линейке, а на нее наносилась шкала, жестко связанная с последовательностью шести членов ряда Фибоначчи: 1, 2, 3, 5, 8, 13 (их сумма равна $32 = 2^5$). Прибавлением или вычитанием этих эталонных отрезков достигались необходимые пропорции сооружения. Шестикратное увеличение всех отложенных на линейке размеров сохраняло гармоническую пропорцию. В соответствии с этой шкалой и строили храмы, театры и стадионы.

Теория измерения гармонии по принципу деления целого в среднем и крайнем отношении (Золотое сечение), разработанная античными математиками, и стала тем фундаментом, на котором впоследствии были воздвигнуты концепции гармонии в искусстве и науке Европы.

Великолепный Парфенон

Древние греки оставили нам великолепные памятники архитектуры, которые доставляют современным людям такое же эстетическое наслаждение, как и нашим далеким предкам. И среди них первое место по праву принадлежит Парфенону.

Строительство Парфенона связано с драматическими страницами истории Древней Эллады. В 480 году до н. э. армия персов

Рис. 1.18. Парфенон

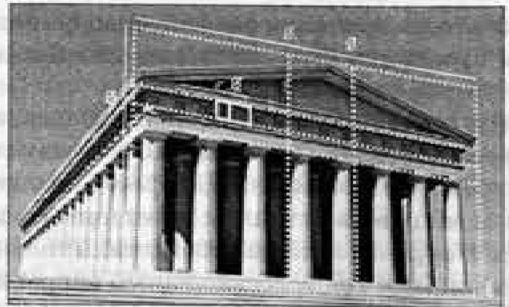


Рис. 1.19. Гармонический анализ Парфенона

во главе с царем Ксерксом вторглась в Грецию. Полчища варваров двигались с севера и остановились у Фермопильского ущелья. Путь им преградили 300 спартанских воинов, прикрывавших отход основных войск. В результате предательства все они пали вместе со своим предводителем — царем Леонидом. Персидская армия захватила и разгромила Афины, но эллины с честью выдержали тяжелое испытание, разгромив персидский флот и армию. Победа греков над персами означала торжество принципов демократии и свободы; она привела к новому плодотворному импульсу в греческом искусстве, к эпохе искусства высокой классики. В произведениях этого периода преобладают чувства величия и радости. Формы художественных произведений отличаются высокой гармоничностью и пластикой. Воплощением этих качеств является храм Афины Парфенон — великолепное сооружение афинского Акрополя.

На протяжении 15 лет правления Перикла в Афинах сооружали необыкновенные по красоте храмы, алтари, скульптуры. Руководителем всех работ был назначен выдающийся греческий скульптор Фидий (*Phidius*), в честь которого Золотое сечение называют часто числом PHI.

Всю вторую половину V века до н. э. на Акрополе шло строительство храмов, пропилей (преддверий), алтаря и статуи Афины Воительницы. В 447 году началась работа над храмом Афины — Парфеноном. Она продолжалась до 434 года до н. э. Для создания гармонической композиции на холме его строители увеличили холм, соорудив при этом мощную насыпь. Современные исследователи установили, что протяженность холма перед Парфеноном, длина храма Афины и участка Акрополя за Парфеноном соотносятся как отрезки золотой пропорции. Таким образом, золотая пропорция была использована уже при создании композиции храмов на священном холме.

Результатом совместных усилий архитекторов, скульпторов, да и всего народа Древней Греции явилось создание *Парфенона* (рис. 1.18), храма богини *Афины Парфенос*, который по праву считается величайшим памятником древнегреческой архитектуры. Описания *Парфенона* всегда изобиловали только превосходными степенями. Этот храм, посвященный покровительнице города — богине *Афине Парфенос*, по праву считается одним из величайших образцов античного зодчества, шедевром мирового искусства и пластики. Он построен в середине V века до н. э. скульпторами *Иктином* и *Калликратом*. Это был период высшего подъема античной культуры, и храм богини Афины на холме Акрополь по сей день гордо напоминает об этом всему миру.

Гармонический анализ Парфенона был осуществлен многими исследователями. И хотя эти исследования несколько отличаются своими подходами, все исследователи сходятся в главном: Парфенон отличается удивительной величественностью и в тоже время глубокой человечностью архитектурных и скульптурных образов, а главной причиной красоты Парфенона является исключительная соразмерность его частей, основанная на Золотом сечении (рис. 1.19).

В строительстве Парфенона принимал участие весь народ. Со всех сторон света в Афины доставляли белый мрамор, медь, слоновую кость, золото, черное дерево, кипарис. Повсюду работали ремесленники: мастера глиняных изделий, плотники, медники, каменотесы, живописцы, эмалировщики, граверы. Расходы на строительство Парфенона были огромны. Враги Перикла, который в те годы правил Афинами, обвинили его в расточительстве и бесполезной трате государственных средств. Тогда Перикл в собрании предложил народу вопрос, находит ли он, что издержано много. Ответ был, что очень много. И тогда Перикл предложил отнести все издержки по строительству Парфенона на его счет, но при этом на здании Парфенона он напишет только свое имя. После этих слов Перикла народ, восхищенный величием его духа (или не желая уступать славу ему одному), закричал, чтобы он все издержки относил на общественный счет и тратил, ничего не жалея.

К сожалению, судьба Фидия, одного из главных создателей Акрополя, сложилась трагически. Обвиненный противниками Перикла в том, что он присвоил часть золота для статуи Афины, а также в нечестии (за то, что изобразил на ее щите среди прочих Перикла и самого себя), Фидий был брошен в тюрьму. Он скончался, скорее всего, находясь в изгнании в Элиде (на северо-западе Пелопоннеса).

Сохранилась легенда о том, как старый осел каждый день возил на афинский Акрополь камни для строительства Парфенона. Когда он окончательно одряхлел, его освободили от обязанностей. Но каждое утро осел шел со всеми к Парфенону. И греки сказали «Смотрите, даже осел понял значение того, что мы творим». И дали ему «пенсию», обязавшись кормить его за общественный счет до самой смерти.

Николай Васютинский, автор замечательной книги «Золотая пропорция» (1990), посвятил Парфенону следующие стихи:

Священный холм и храм
Божественной Афины,
Великолепный Парфенон,
Похоронив забытые руины,
К богам Олимпа устремлен.

Золотое сечение в греческой скульптуре

Эталоном красоты человеческого тела, образцом гармонического телосложения издавна и по праву считаются великие творения греческих скульпторов: Фидия, Поликлета, Мирона, Праксителя. В своих творениях греческие мастера использовали принцип золотой пропорции. Одним из высших достижений классического греческого искусства может служить статуя *Дорифора*, изваянная Поликлетом в V веке до н. э. (рис. 1.20 и рис. 2 цветной вклейки). Эта статуя считается наилучшим примером для анализа пропорций идеального человеческого тела, установленных античными греческими скульпторами. Ведь именно этой скульптуре было присвоено название «Канон».

Фигура юноши выражает единство прекрасного и доблестного, лежащих в основе принципов греческого искусства. Статуя полна спокойной уверенности; гармония линий, уравновешенность частей олицетворяют могущество физической силы. Широкие плечи почти равны высоте туловища, высота головы восемь раз укладывается в высоте тела, а положение пупка на теле атлета отвечает золотой пропорции. Гармонический анализ статуи Дорифора, проведенный профессором Г. Д. Гриммом в его книге «Пропорциональность в архитектуре» (1935), указывает на следующую связь знаменитой статуи с Золотым сечением $M = \tau$.

1. Первый раздел фигуры Дорифора или ее полной высоты $M^0 = 1$ в пропорции Золотого сечения $M^1 = \tau^{-1}$ и $M^2 = \tau^{-2}$ проходит через пупок.

2. Второй раздел нижней части туловища $M^2 = \tau^{-2}$ и $M^3 = \tau^{-3}$ проходит через линию колена.

3. Третий раздел $M^3 = \tau^{-3}$ и $M^4 = \tau^{-4}$ проходит через линию шеи.

Одним из лучших памятников греческого скульптурного искусства является *Венера Милосская* — статуя богини Афродиты, найденная на острове Мелос (скульптор Агесандр из Антиохии на Медаре, около 120 года до н. э.). Богиня изображена скульптором полуобнаженной, так что одеяние, закутывая ноги и низ торса, является постаментом для открытых рук, которые были показаны в движении (рис. 1.21 и рис. 3 цветной вклейки).

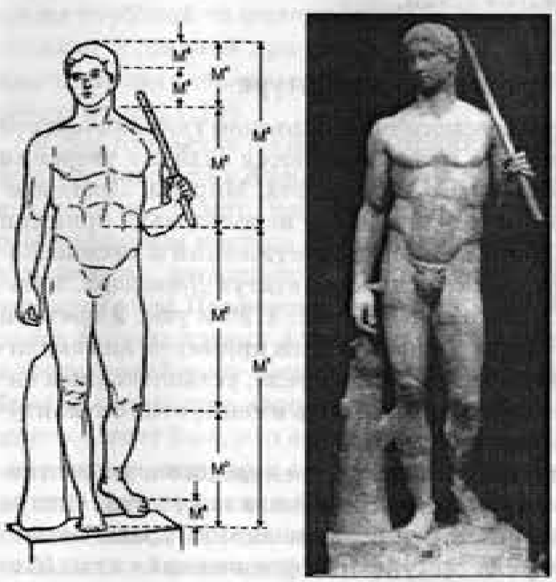


Рис. 1.20. *Поликлет. Дорифор*

Рис. 1.21. *Венера Милосская*

Возможно, в одной из них Афродита держала яблоко. В эпоху эллинизма она была одной из любимых богинь. Ее представляли то кокетливой, то задумчивой, то шаловливой. Афродита с острова Мелос строга и сдержанна. У нее простая прическа с прямым пробором, лицо и фигура представлены довольно обобщенно. Вероятно, она стояла на высоком постаменте и смотрела на зрителя сверху вниз. *Венера Милосская* является настоящей жемчужиной Лувра, эталоном женской красоты Древней Эллады.

1.11. Золотое сечение в искусстве Возрождения. «Мона Лиза» Леонардо да Винчи

Идея «божественной гармонии» в эпоху Возрождения

Идея гармонии оказалась в ряду тех концептуальных построений античной культуры, к которым церковь отнеслась с большой заинтересованностью. Согласно христианской доктрине, Вселенная была творением Бога и беспрекословно подчинялась его воле. И христианский Бог при сотворении мира руководствовался математическими принципами. Эта католическая доктрина в науке и искусстве Возрождения приобрела форму поиска математического плана, по которому Бог создал Вселенную.

По мнению современного американского историка математики Мориса Клайна, именно тесное слияние религиозной доктрины о Боге как творце Вселенной и античной идеи о числовой гармонии мироздания, стало одной из важнейших причин огромного всплеска культуры в эпоху Возрождения. Наиболее ярко главная цель науки эпохи Возрождения изложена в следующем высказывании знаменитого астронома этой эпохи Иоганна Кеплера:

> «Главной целью всех исследований внешнего мира должно быть открытие рационального порядка и гармонии, которые Бог ниспослал миру и открыл нам на языке математики».

Искусство эпохи Возрождения (особенно живопись) в значительной степени связано с библейскими сюжетами. Ярким примером картины, написанной по библейским сюжетам, является картина «Святое семейство» Микеланджело. Она справедливо признана одним из шедевров западноевропейского искусства. Это единственная работа Микеланджело, выполненная на дереве, который за исключением римских фресок бóльшую часть времени посвятил скульптуре. Фигура Марии, Иосифа и младенца Христа образуют винтообразную группу, внося сильный заряд пластической энергии в композиционное целое. Картину часто называют «Тондо Дони», поскольку, во-первых, она принадлежала семейству Дони во Флоренции, а во-вторых, имеет круглую форму (по-английски *tondo*). По общепринятой гипотезе, картина была исполнена к свадьбе Аньоло Дони с Маддаленой Строцци, герб которой вырезан на раме. Произведя гармонический анализ этой картины, исследователи обнаружили, что композиция картины основано на *пентакле* (рис. 1.22 и рис. 4 цветной вклейки).

Другим примером картины, основанной на библейском сюжете, является картина «Распятие» (*Crucifixion*) еще одного знаменитого живописца эпохи Возрождения — *Рафаэля Санти* (1483–1520). Гармонический анализ картины (рис. 1.23) показывает, что в композиционный план этой картины основан на золотом равнобедренном треугольнике (рис. 1.12 и рис. 5 цветной вклейки).

Рис. 1.22. *Микеланджело.* Святое семейство

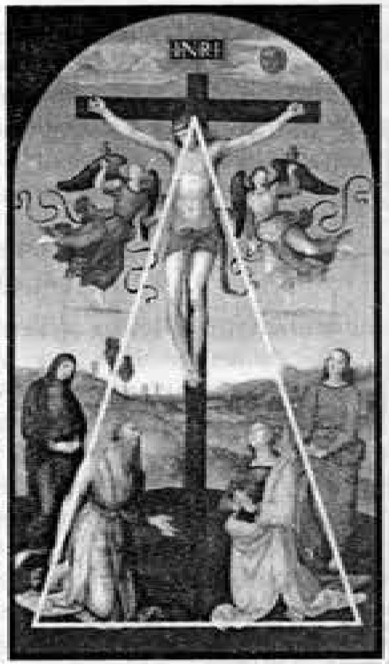


Рис. 1.23. *Рафаэль.* Распятие

Рис. 1.24. *Микеланджело.* Давид

«Витрувийский человек» Леонардо да Винчи

В период Возрождения продолжаются попытки создать идеализированную эталонную модель гармонически развитого человеческого тела. Известно, что размах вытянутых в стороны рук человека примерно равен его росту, вследствие чего фигура человека вписывается в квадрат и круг. Известны идеальные фигуры, созданные Леонардо да Винчи и Дюрером. Давно существует мнение, что пентагональная, или пятилучевая, симметрия, столь характерная для мира растений и животных, проявляется в строении человеческого тела. Человеческое тело можно рассматривать как пятилучевое, где лучами служат голова, две руки и две ноги. В связи с этим многие исследователи математических закономерностей тела человека вписывали его в пентаграмму — так назвали позу человека с раздвинутыми на 180° руками и разведенными на 90° ногами. Такая модель нашла отражение и в построениях Леонардо да Винчи и Дюрера, в частности в фигу-

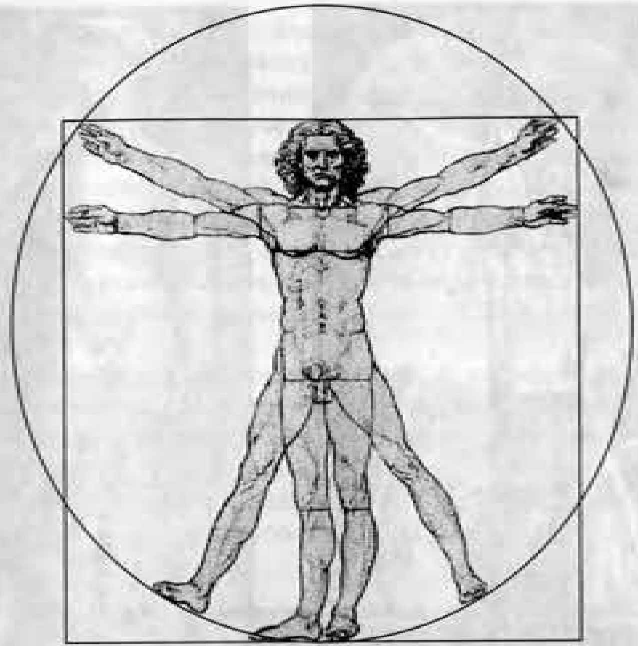


Рис. 1.25. «Витрувийский человек» Леонардо да Винчи

ре знаменитого «Витрувийского человека» Леонардо да Винчи (рис. 1.25).

«Давид» Микеланджело

Примером эталонной модели гармонически развитого человеческого тела является знаменитая статуя *Давида* Микеланджело. В 1501 году Микеланджело получил от правительства Флоренции заказ на создание 5,5-метровой статуи Давида, над которой он работал с 1501 по 1504 год. Установленная на главной площади Флоренции рядом с ратушей Палаццо Веккио, она должна была стать символом свободы республики. Микеланджело изобразил Давида в виде прекрасного, атлетически сложенного гиганта в момент перед сражением, полного уверенности и грозной силы (современники называли ее *terribilita* — устрашающая). И подобно Дорифору Поликлета, который в античную эпоху стал каноном красоты мужского тела, Давида Микеланджело можно считать каноном эпохи Возрождения. Сравнение статуи Давида

(рис. 1.24 и рис. 6 цветной вклейки) со статуями Дорифора (рис. 1.20) и Венеры Милосской (рис. 1.21) не оставляет никаких сомнений в том, что все пропорции Давида основаны на Золотом сечении!

Леонардо да Винчи

«Мона Лиза» Леонардо да Винчи

Ренессанс в истории культуры стран Западной и Центральной Европы — переходная эпоха от средневековой культуры к культуре нового времени. При этом наиболее характерной чертой этой эпохи является гуманистическое мировоззрение и обращение к античному культурному наследию, как бы возрождение античной культуры. Эпоха Возрождения отмечена крупными научными открытиями в области естествознания. Специфической особенностью науки этой эпохи была тесная связь с искусством, и это объединение иногда выражалось в творчестве одной личности. Наиболее ярким примером такой многогранной личности является *Леонардо да Винчи* — художник, ученый, инженер. Поражает количество талантов, которыми от природы был наделен Леонардо да Винчи. Вот как описывает да Винчи журналистка Александра Пистунова в статье «Музыка Леонардо». Леонардо от природы имел завидное здоровье, был прекрасен собою, высок, синеглаз. Родился под звездой Марса 15 апреля и, может быть, поэтому обладал огромной силой и мужской доблестью. Дивно пел, на глазах у слушателей сочиняя мелодии и стихи. Играл на любом музыкальном инструменте, более того, сам их создавал.

Но главными областями деятельности, где проявился гений Леонардо, были наука и искусство. Для искусства Леонардо да Винчи современники и потомки никогда не находили иных определений, чем «гениальное», «божественное», «великое». Но те же слова можно отнести и к его научным откровениям: он придумал танк, экскаватор, вертолет, подводный корабль, парашют, автоматическое оружие, водолазный шлем, лифт. Он решил сложнейшие проблемы акустики, ботаники, космографии, придумал на столетие раньше, чем Галилей, часовой маятник, разработал теорию механики и многое другое. Отношение к гармонии мироздания Леонардо выразил в словах:

«Вся земля, горы, леса, моря составляют единое целое, в котором все друг друга питает, со всем взаимодействует, все взаимосвязывает, поддерживает, но в то же время и разрушает, обновляет».

В зале Лувра, в Париже, каждый посетитель пытается отыскать одну картину. Картина эта — знаменитая «Мона Лиза», или «Джоконда», принадлежащая кисти Леонардо да Винчи. Мастер работал над портретом напряженно и долго. Он делал множество зарисовок, большое внимание уделял позе портретируемой, повороту ее головы, положению рук. Известный художник Джорджо Вазари рассказывает, что во время работы над портретом Моны Лизы Леонардо приглашал в мастерскую певцов, музыкантов, шутов, чтобы не только поддерживать хорошее настроение молодой жещины-модели, но и иметь возможность следить за изменением выражением ее лица. И только после четырех лет напряженного труда он наконец смог подарить миру свою знаменитую «Джоконду».

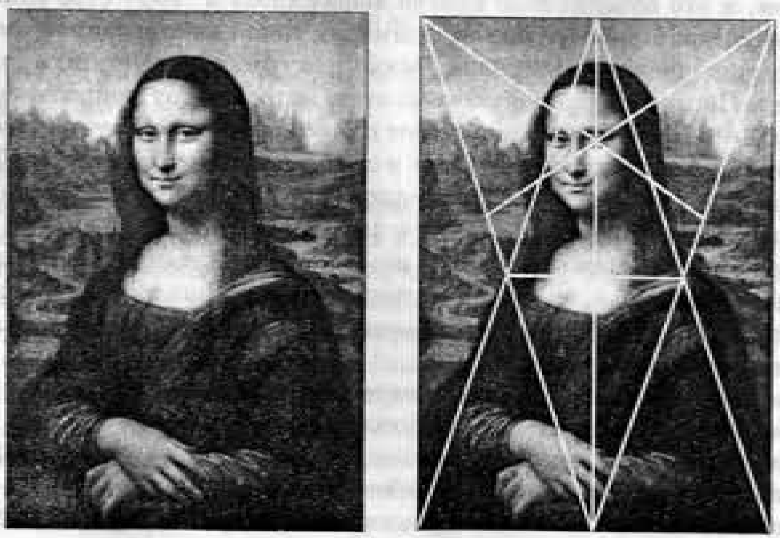


Рис. 1.26. Картина Леонардо да Винчи «Мона Лиза» («Джоконда») и ее гармонический анализ

Вот как описывает этот знаменитый портрет российский искусствовед Татьяна Седова в статье «Картина, знакомая всем»:

«Мона Лиза спокойно сидит в кресле, непринужденно облокотясь на его ручку. Фигура ее написана на фоне фантастического скалистого пейзажа. И кажется, что эта гордо сидящая в кресле женщина как бы царит над миром. Леонардо, как истинный сын эпохи Возрождения, твердо верил в высокое назначение человека. И всегда во всех без исключения работах стремился образ совершенной человеческой личности наделить не только физической, но и духовной красотой. Этот идеальный человеческий образ обычно не противопоставлялся действительности, а, напротив, был как бы ее порождением. И в портрете Джоконды Леонардо показывает гармоническое слияние души молодой женщины с окружающей природой. Именно в этой душевной гармонии — самая сильная и самая обаятельная сущность Джоконды».

Во все времена эта картина вызывала огромное восхищение. Считается, что секрет очарования «Джоконды» в изменчивости ее облика. Существует мнение, что женщина, изображенная на картине, несколько месяцев назад потеряла ребенка. Этим объясняется ее темный цвет одежды. Она сидит в спокойной позе, сложив руки на коленях, но лицо ее полно неуловимого движения: слегка дрогнули в легкой улыбке губы, и им в ответ заулыбались глаза, внимательно и чуть насмешливо следящие за зрителем. В те времена слегка приоткрытые в уголках рта губы считались признаком элегантности. Чуть заметная улыбка Моны Лизы, нежная и загадочная, озаряет всю картину. Загадочность образа усиливает и фон: гористый серебристо-голубой пейзаж.

В чем же причина очарования «Джоконды»? Поиски ответа на этот вопрос продолжаются. Создавая свой шедевр, художник использовал секрет, известный многим портретистам: вертикальная ось полотна проходит через зрачок левого глаза, что должно вызывать у зрителя чувство возбуждения, то есть в своей картине художник использовал принцип симметрии. Но может быть причина в другом? Картина гениального художника привлекла внимание исследователей, которые обнаружили, что композиционное построение картины основано на двух золотых треугольниках, повернутых друг к другу своими основаниями (рис. 1.26 и рис. 7 цветной вклейки). Гармонический анализ картины показывает, что зрачок левого глаза, через который проходит вертикальная ось полотна, находится на пересечении двух биссектрис верхнего золотого треугольника, которые, с одной стороны, делят пополам углы при основании золотого треугольника, а с другой стороны, в точках пересечения с бедрами золотого треугольника делят их в пропорции Золотого сечения. Таким образом, Леонардо использовал в своей картине не только принцип симметрии, но и Золотое сечение, то есть код да Винчи!

Будучи высшей точкой, вершиной творчества Леонардо, это полотно является как бы кристаллизацией его гения, сокровенных мыслей и вдохновения. О Моне Лизе не известно почти ничего, кроме нескольких незначительных фактов, и потому трудно ответить на очень важный вопрос, часто задаваемый и обсуждаемый: была ли она просто моделью для Леонардо или же она была его музой и даже любовью, во что многие хотели бы верить. Есть некоторые факты, подтверждающие правильность последнего предположения, и это, возможно, объясняет особое волшебство картины. Но какова бы ни была правда, какой замечательной, должно быть, являлась она личностью, если сумела вызвать к жизни все лучшее в этом гиганте Ренессанса! Она помогла гению оставить потомкам уникальный шедевр, вдохновляющий тысячи и тысячи людей на протяжении веков.

С этой знаменитой картиной связано огромное количество историй и легенд. Начнем с истории ее создания. Джорджо Вазари в своих «Жизнеописаниях» сообщает об этой картине: «Взялся Леонардо выполнить для Франческо дель Джокондо портрет Моны Лизы, жены его». Как сейчас предполагают некоторые исследователи, Вазари, видимо, ошибся. Новейшие исследования показывают, что на картине изображена не жена флорентийского дворянина дель Джокондо, а какая-то другая женщина. Многих исследователей до сих пор поражает, почему купец дель Джокондо не оставил себе портрет супруги. Действительно, портрет стал собственностью художника, что является дополнительным аргументом в пользу того, что Леонардо изобразил не Мону Лизу.

Возможно, написание этой картины связано с некоторой тайной в жизни Леонардо. Загадка Леонардо начинается с его рождения. Как известно, Леонардо был незаконнорожденным сыном женщины, о которой почти ничего не известно. Известно только, что ее звали Катерина и что была она хозяйкой таверны. Об отце Леонардо известно значительно больше. Отец Леонардо, господин Пьеро, которому к моменту рождения сына было около двадцати пяти лет, был нотариусом и обладал впечатляющими мужскими достоинствами: он дожил до семидесяти семи лет, имел четырех жен (трех успел похоронить) и был отцом двенадцати детей, причем последний ребенок появился на свет, когда ему было семьдесят пять.

В эпоху Возрождения на незаконнорожденных детей смотрели терпимо. К таким детям часто относились так же, как к детям, рожденным в законном браке. Леонардо сразу же был признан своим в семье отца. Однако в его дом он был взят далеко не сразу. Вскоре после рождения он был отправлен вместе с Катериной в деревню Анхиано, расположенную недалеко от города Винчи, и оставался там около четырех лет, в течение которых мессир Пьеро успел жениться на первой из своих жен, шестнадцатилетней девушке, занимавшей на социальной лестнице более высокую ступень, чем мать Леонардо. Молодая жена оказалась бесплодной. Возможно, по этой причине Леонардо еще в возрасте приблизительно четырех с половиной лет был взят в городской дом, где сразу же оказался на попечении многочисленной родни: дедушки, бабушки, отца, дяди и приемной матери. В налоговом реестре, относящемся к 1457 году, он назван незаконным сыном Пьеро.

В течение всей своей жизни Леонардо хранил память о своей родной матери Катерине, которая оказалась удивительно похожей на Мону Лизу, жену флорентийского купца Джокондо. Возможно, это стало главной причиной желания Леонардо создать живописный портрет Моны Лизы. Давно не испытывал Леонардо да Винчи такого огромного прилива творческих сил. Все, что было в нем самом жизнерадостного, светлого и ясного, он вкладывал в свою работу. И всю свою сыновью любовь к своей матери Катерине он воплотил в своей знаменитой картине, которая определила развитие живописи на многие века вперед. И спасибо Богу за то, что он свел Мону Лизу с Леонардо да Винчи на закате жизненного пути великого художника!

1.12. «Божественная пропорция» Луки Пачоли

Культура Древней Греции и культура Рима и Византии — вот два мощных потока духовных ценностей, слияние которых дало ростки нового и породило титанов Ренессанса. Титан — это самое точное слово по отношению к таким людям, как Леонардо да Винчи, Микеланджело, Николай Коперник, Альберт Дюрер, Христофор

Колумб, Америго Веспуччи. В эту замечательную плеяду по праву входит и великий итальянский математик Лука Пачоли.

Он родился в 1445 году в провинциальном городке Борго-Сан-Сеполькро, что в переводе с итальянского звучит не слишком радостно: «Город Святого Гроба». Мы не знаем, сколько лет было будущему математику, когда его отдали учиться в мастерскую художника *Пьеро делла Франческо*, слава которого гремела по всей Италии.

Это была первая встреча юного дарования с великим человеком. Пьеро делла Франческо был художником и математиком, но только вторая ипостась учителя нашла отзвук в сердце ученика. Юный Лука, математик от Бога, был влюблен в мир чисел, число представлялось ему некоторым универсальным ключом, одновременно открывающим доступ к истине и красоте.

Второй великий человек, встретившийся на жизненном пути Луки Пачоли, был *Леон Баттиста Альберти* — архитектор, ученый, писатель, музыкант. Глубоко западут в сознание Л. Пачоли слова Альберти:

«Красота есть некое согласие и созвучие частей в том, частями чего они являются, — отвечающие строгому числу, ограничению и размещению, которых требует гармония, то есть абсолютное и первичное начало природы».

Влюбленный в мир чисел, Л. Пачоли повторит за Пифагором мысль о том, что число лежит в основе Вселенной.

В 1472 году Лука Пачоли осуществляет пострижение в монахи францисканского ордена, что дает ему возможность заниматься наукой. События показали, что Пачоли сделал правильный выбор. В 1477 году он получает профессорское кресло в университете города Перуджи.

Лука Пачоли (1445–1514)

Сохранилось следующее портретное описание Луки Пачоли того времени:

«Красивый, энергичный молодой мужчина: поднятые и довольно широкие плечи обличают врожденную физическую силу, мощная шея и развитая челюсть, экспрессивное лицо и глаза, излучающие благородство и интеллект, подчеркивают силу

характера. Такой профессор мог заставить слушать себя и уважать свой предмет».

Педагогический труд Пачоли сочетает с научной работой: он начинает писать энциклопедический труд по математике. В 1494 году этот труд выходит в свет под названием «Сумма арифметики, геометрии, учения о пропорциях и отношениях». Весь материал книги делится на две части; первая часть посвящена арифметике и алгебре, вторая — геометрии. Один из разделов книги посвящен вопросам применения математики в коммерческом деле, и в этой части его книга является продолжением знаменитой книги Фибоначчи *Liber abaci* (1202), о которой мы расскажем ниже. По существу, это математическое сочинение Пачоли на закате XV века подытоживает математические знания эпохи итальянского Возрождения.

Монументальная печатная работа Пачоли, несомненно, способствовала его славе. Когда в 1496 году в Милане — крупнейшем городе и государстве Италии — в университете открыли кафедру математики, занять ее был приглашен Лука Пачоли.

В это время Милан был центром науки и искусства, в нем жили и творили выдающиеся ученые и художники, и одним из них был Леонардо да Винчи, который стал третьим великим человеком, встретившимся на жизненном пути Луки Пачоли. Под непосредственным влиянием Леонардо он начинает писать свою вторую великую книгу *Divine Proportione* («Божественная пропорция»).

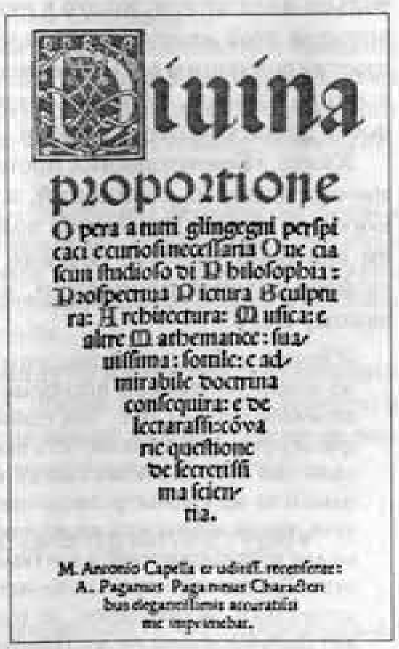


Рис. 1.27. Книга Луки Пачоли «Divina Proportione»

Книга состоит из трех частей: в первой части излагаются свойства Золотого сечения, вторая часть посвящена правильным многогранникам, третья — приложениям Золотого сечения в архитектуре. В своей книге Пачоли, апеллируя к «Государству», «Законам», «Тимею» Платона, последовательно выводит 12 (!) различных свойств Золотого сечения. Характеризуя эти свойства, Пачоли пользуется весьма сильными эпитетами: «исключительное», «превосходнейшее», «замечательное», «почти сверхъестественное» и т. п. Раскрывая данную пропорцию в качестве универсального отношения, выражающего и в природе и в искусстве совершенство красоты, он называет ее «божественной» и склонен рассматривать ее как «орудие мышления», «эстетический канон», «как принцип мира и природы».

Новая книга Пачоли, изданная в 1509 году, оказала заметное влияние на современников. Изданный ин-кварто фолиант Пачоли был одним из первых прекрасных образцов книгопечатного искусства Италии. Историческое значение книги состояло в том, что это было первое математическое сочинение, целиком посвященное Золотому сечению, то есть коду да Винчи. Есть все основания полагать, что именно Леонардо да Винчи стоял у истоков этой книги! Более того, по существу, Леонардо принадлежит не только идея книги, но его в некотором смысле можно считать соавтором этой книги, поскольку именно он был художником, иллюстрировавшим ее. Он нарисовал 60 (!) великолепных рисунков к книге Пачоли, которые сохраняют свою художественную ценность до настоящего времени.

Книга «Божественная пропорция» является одним из первых математических сочинений, в котором христианская доктрина о Боге как творце Вселенной получает научное обоснование. Пачоли называет Золотое сечение «божественным» и выделяет ряд свойств золотой пропорции, которые, по его мнению, присущи самому Богу:

> «Первое заключается в том, что существует только она одна, и невозможно привести примеры пропорций другого рода или хоть сколько-нибудь отличающихся от нее. Эта единственность, согласно с политическим и философским учениями, есть высочайшее свойство самого Бога. Второе свойство есть свойство святой триединости, а именно: как в божестве одна и та же сущность заключается в трех лицах — отце, сыне и святом духе, так же и одна и та же пропорция этого рода может иметь место только для трех выражений, а для большего и меньшего выражений не существует. Третье свойство заключается в том, что, подобно тому как Бог не может быть ни определен, ни словом разъяснен, наша пропорция не может быть выражена ни доступным нам числом, ни какой бы то ни было рациональной величиной и остается скрытой и тайной и поэтому математиками названа иррациональной. Четвертое свойство заключается в том, что, подобно тому как Бог никогда не изменяется и представляет все во всем и все в каждой своей части, и наша пропорция для всякой непрерывной и определенной величины одна и та же, велики или малы эти части, никаким образом не может быть ни изменена, ни по иному воспринята рассудком. К названным свойствам вполне справедливо можно присоединить пятое свойство, заключающееся в том, что, подобно тому как Бог вызвал к бытию небесную добродетель, иначе называемую пятой субстанцией, а с ее помощью — четыре других простых тела, именно четыре элемента — землю, воду, воздух и огонь, а с их помощью вызвал к бытию всякую вещь в природе, так и наша священная пропорция, согласно Платону в его «Тимее», дает формальное бытие самому небу, ибо ему приписывается вид тела, называемый додекаэдром, которое невозможно построить без нашей пропорции».

В 1510 году Луке Пачоли исполнилось 65 лет. Он устал, постарел. В библиотеке Болонского университета хранится рукопись неизданной работы Л. Пачоли «О силах и количествах». В предисловии мы находим печальную фразу: «Приближаются последние дни моей жизни». Он умер в 1515 году и похоронен на кладбище своего родного города Борго-Сан-Сеполькро.

После смерти труды великого математика оказались преданы забвению почти на четыре столетия. И когда в конце XIX века его работы стали всемирно известными, благодарные потомки после 370-летнего забвения на его могиле поставили памятник, на котором написали:

> «Луке Пачоли, который был другом и советником Леонардо да Винчи и Леона Баттиста Альберти, который первый дал алгебре язык и структуру науки, который применил свое великое открытие к геометрии, изобрел двойную бухгалтерию и дал в математических трудах основы и неизменные нормы для последующих поколений».

В этой надгробной надписи упомянуты имена трех гениальных итальянцев — Леонардо да Винчи, Леона Батттиста Альберти и Луки Пачоли, которые внесли неоценимый вклад в развитие теории Гармонии и Золотого сечения, то есть кода да Винчи!

1.13. «Пропорциональность в архитектуре» Г. Д. Гримма

В теории архитектуры хорошо известна книга «Пропорциональность в архитектуре», опубликованная русским архитектором профессором Г. Д. Гриммом в 1935 году.

Рис. 1.28. Книга Г. Д. Гримма «Пропорциональность в архитектуре»

Цель книги сформулирована во «Введении» следующим образом:

«Ввиду исключительного значения Золотого сечения в смысле такого пропорционального деления, которое устанавливает постоянную связь между целым и его частями, и дает постоянное между ними соотношение, не достигаемое никаким другим делением, схема, основанная на нем, выдвигается как нормативная на первое место и принята нами в дальнейшем как при проверке основ пропорциональности исторических памятников, так и современных сооружений...

Считаясь с этим общим значением Золотого сечения во всех проявлениях архитектурной мысли, теорию пропорциональности, основанную на делении целого на пропорциональные части, отвечающие членам геометрической прогрессии Золотого сечения, следует признать основой архитектурной пропорциональности вообще».

Книга профессора Г. Д. Гримма является своеобразным гимном Золотому сечению, то есть коду да Винчи.

Гримм рассматривает Золотое сечение отрезка AB точкой C на две неравные части — большую часть CB, называемую *майором*, и меньшую часть AC, называемую *минором*; при этом при делении большего отрезка AC золотым сечением меньший отрезок становится майором большего отрезка целого.

Вслед за Лукой Пачоли, который сравнивал свойства Золотого сечения со свойствами самого Бога, Г. Д. Гримм после тщательного исследования геометрических свойств Золотого сечения подводит, как он говорит, «следующие итоги исключительных свойств Золотого сечения», которые выделяют его из числа всех других возможных делений отрезка и ставят его в этом отношении на первое место:

1. Одно Золотое сечение решает полностью задачу пропорционального деления целого на неравные части, заключающегося в достижении гармоничного между ними и с целым отношения путем деления целого на такие две неравные части, из которых меньшая часть так относилась бы к большей, как эта последняя

к целому, и обратно — целое к большей своей части, как бóльшая к меньшей.

2. Одно Золотое сечение из всех возможных делений целого дает постоянное отношение между целым и его частями; только в нем от основной величины — от целого — находятся в полной зависимости оба предыдущих члена, причем отношение их между собою и с целым не случайное, а постоянное, при всяком значении целого равное

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0{,}618.$$

3. При делении целого золотым сечением на майор и минор, этот последний в свою очередь является бóльшим отрезком вновь разделенного по золотому сечению первичного майора.

4. Деление по золотому сечению, один раз проделанное над основным целым, может быть продолжено путем откладывания каждый раз минор на майор и дает при этом непрерывный ряд золотых сечений производного порядка. Отношение же целого к любому члену производного его деления по золотому сечению равно соответствующей степени его майора.

5. Следствием п.4 является дополнительное свойство Золотого сечения, по которому постепенное деление целого по золотому сечению (высших порядков) дает геометрически убывающую прогрессию со знаменателем

$$M=\frac{\sqrt{5}-1}{2}=0{,}618.$$

Каждый член этой прогрессии находится в отношении Золотого сечения к его предыдущему и к его последующему члену.

6. Майор основного отрезка есть минор нового целого, состоящего из первоначального целого, сложенного с его майором.

7. На основании п. 5, прибавляя непрерывно к целому соответствующий ему майор, получаем геометрически возрастающую прогрессию со знаменателем

$$\frac{1}{M}=\frac{2}{\sqrt{5}-1}=1{,}618.$$

8. Сумма двух последовательных членов прогрессии Золотого сечения равна предыдущему члену.

9. Разница двух последовательных членов прогрессии Золотого сечения равна последующему члену.

10. Все перестановки отдельных членов, которые допускаются для всякой непрерывной геометрической пропорции, допустимы и для деления по золотому сечению.

11. Каждые три непосредственно расположенные друг за другом отрезка относятся между собой как майор и минор.

12. Деление по Золотому сечению как первичное, так и высших порядков, дает наименьшее возможное число разных отношений между отрезками целого, деленного на неравные части, и дает наилегчайшее восприятие этих отношений.

13. Постоянное отношение деления по Золотому сечению — 0,618, выраженное со сравнительно незначительной погрешностью в приближенных целых малых числах 8/5, 5/3, 3/2 отвечает численным величинам консонансных интервалов октавы — уменьшенной сексты, сексты и квинты.

14. Производное деление целого по золотому сечению, Золотое сечение высших порядков, дает приближенное значение оптимальных консонансных звуков октавы.

Г. Д. Гримм приходит к выводу:

«В общем итоге приходится признать исключительно выдающееся свойство Золотого сечения, которое не достигается ни среднеарифметическими пропорциями, ни тем более другими делениями целого».

Далее Гримм демонстрирует примеры линейной пропорциональности деления по Золотому сечению (статуя Дорифора), анализирует пропорциональное согласование площадей прямоугольников, треугольников и кругов по Золотому сечению, рассматривает спирали Золотого сечения и, наконец, пропорциональное сочетание объемов кубов, параллелепипедов, треугольных призм и четырехгранных пирамид на основе Золотого сечения.

Эти исследования приводят к следующему заключению:

«Приведенный нами разбор значения Золотого сечения и исключительных его свойств в смысле пропорциональности, а также теоретическое применение пропорциональной схемы Золотого сечения для решения задач пропорционального деления, как линейных, так и плоскостных и объемных масс целого, приводит к заключению, что для полной пропорциональной согласованности архитектурного памятника, представляющего собой во всяком случае объемное решение, требуется пропорциональное согласование прежде всего его линейных размеров по высотам и горизонталям, следствием чего и является пропорциональное решение фасадных площадей и далее всего объема».

Профессор Гримм подтверждает свои теоретические изыскания в области пропорциональной схемы Золотого сечения архитектурными примерами из искусства классики (Парфенон, храм Юпитера в Дугге в Тунисе), памятниками византийского искусства, итальянского Возрождения (церковь Сан Пиетро ин Монторио в Риме (рис. 1.29 и рис. 8 на цветной вклейке), памятник Коллеони, собор Святого Петра в Риме).

На первый взгляд архитектура барокко существенно отличается от архитектуры классики и итальянского Возрождения, и можно было бы ожидать отсутствия в этих памятниках Золотого сечения. Ярким примером стиля барокко является знаменитый *Смольный собор*, воздвигнутый по проекту Растрелли в Санкт-Петербурге. Ансамбль Смольного монастыря — один из лучших архитектурных ансамблей Санкт-Петербурга в стиле русского барокко. Его название восходит еще к первым годам существования

Рис. 1.29. Церковь Сан Пиетро ин Монторио в Риме (архитектор Браманте)

Рис. 1.30. Смольный собор в Санкт-Петербурге (архитектор Растрелли)

города. Тогда на этом месте, где Нева делает крутой поворот с юга на запад, находился Смоляной двор — здесь готовили смолу для нужд Адмиралтейства. В 1744 году императрица Елизавета, дочь Петра Великого, задумала построить на этом месте монастырь. В 1749 году началось строительство по проекту великого архитектора Растрелли, создателя Зимнего дворца.

В центре комплекса находится великолепный бело-голубой Смольный собор, высота которого достигает 93,7 м. Собор поражает роскошью отделки, совершенством пропорций и разнообразием декоративных форм. Вокруг собора расположены четыре церкви и выполненные в той же бело-голубой гамме корпуса, которые ограничивают пространство в форме креста.

Ансамбль Смольного собора (рис. 1.30 и рис. 9 на цветной вклейке) производит неизгладимое впечатление. Уже издалека он вызывает восхищение, обладая странным, мистическим свойством как бы уменьшаться при подходе к нему, не утрачивая своей величественности. Следует отметить, что даже не испытывающие особой любви к стилю барокко профессиональные зодчие отдавали должное этому творению Растрелли, совершенству его пропорций и изяществу декоративного убранства.

Проведя гармонический анализ Смольного собора, который является одним из общепризнанных памятников стиля барокко, Г. Д. Гримм делает заключение:

> «...отрыва от обшей схемы Золотого сечения в его пропорциях не замечается... Никаких сознательно внесенных диссонансов пропорциональности, помимо известного отхода от норм классики, не усматривается и, во всяком случае, неоспоримо наличие Золотого сечения в членениях основных масс собора».

На примере готического собора в Ульме (Германия), постройка которого была начата в 1377 году и закончена в XVI веке, Гримм делает следующее заключение относительно готической архитектуры:

> «Во всяком случае, как в этом, так и в других зданиях, пропорционально проработанных по схеме триангуляции готики, удается проследить интуитивно внесенное в их отношения Золотое сечение, без противоречия с их композиционными решениями».

Пропорциональные достижения русских зодчих, по мнению Г. Д. Гримма, «основаны на их интуиции, на архитектурно-художественных исканиях». Тем не менее в лучших памятниках и этой эпохи мы встречаем многократное применение отношений, отвечающих Золотому сечению. В качестве примера такого архитектурного памятника Г. Д. Гримм приводит колокольню церкви Рождества Христова в Ярославле, в которой «как и в ряде других древнерусских памятников, усматривается весьма существенное согласование с Золотым сечением в главных основных их массах, при целом ряде частичных от него отступлений».

Хотя по поводу гармонических воззрений профессора Гримма не существует единого мнения, тем не менее в предисловии редактора сказано:

> «Сама попытка обшей формулировки принципа Золотого сечения как основы пропорциональности архитектурных стилей, проверенная на материале античной и европейской архитектуры, заслуживает внимания, чтобы быть опубликованной, тем более, что в книге дается исторический очерк развития теории пропорциональности, а также развернутое математическое изложение принципа Золотого сечения».

1.14. Золотое сечение в искусстве XIX и XX веков

Картина Ивана Шишкина «Корабельная роща»

В сокровищнице русского искусства Ивану Ивановичу Шишкину (1832–1898) принадлежит одно из самых почетных мест. С его именем связана история отечественного пейзажа второй половины XIX столетия. Произведения выдающегося мастера, лучшие из которых стали классикой национальной живописи, обрели огромную популярность. Среди мастеров старшего поколения И. И. Шишкин представлял своим искусством явление исключительное, какого не знали в области пейзажной живописи предыдущие эпохи. Подобно многим русским художникам, он от природы обладал огромным талантом самородка. Никто до Шишкина с такой ошеломляющей открытостью и с такой обезоруживающей сокровенностью не поведал зрителю о своей любви к родному краю, к неброской прелести северной природы.

На веб-сайте Международного центра духовной культуры вы можете найти более детальную информацию о жизни и творчестве Ивана Шишкина. Мы с благодарностью используем некоторые материалы с этого сайта.

Картина «Корабельная роща» (рис. 1.31 и рис. 10 на цветной вклейке), написанная Шишкиным в 1898 году, считается достойным завершением его цельного и самобытного творчества. Это полотно считается классическим по полноте и многогранности художественного образа, совершенству композиции. В основу этого пейзажа легли натурные этюды, выполненные Шишкиным в родных прикамских лесах, где он нашел свой идеал — синтез гармонии и величия. Но в произведении воплощено и то глубочайшее знание русской природы, которое было накоплено мастером за почти полувековую творческую жизнь.

В центре картины выделены освещенные солнцем мощные стволы вековых сосен. Густые кроны бросают на них тень. Вдали — пронизанное теплым светом, словно манящее к себе пространство бора. Срезая рамой верхушки деревьев (прием, часто встречающийся у Шишкина), он усиливает впечатление огромности деревьев, которым словно не хватает места на полотне. Великолепные стройные сосны даны во всей своей пластической красоте. Их чешуйчатая кора написана с использованием многих цветов. Как всегда неторопливо рассказывает он о жизни этого леса в погожий летний день. Изумрудная трава и сероватая зелень молочая спускаются к мелкому, бегущему по камням и песку ручью. Переброшенная через него изгородь говорит о близком присутствии человека. Две вспорхнувшие желтые бабочки над водой, зеленоватые отражения в ней, чуть голубоватые рефлексы от неба, скользящие лиловатые тени на стволах привносят

Рис. 1.31. Картина И. Шишкина «Корабельная роща»

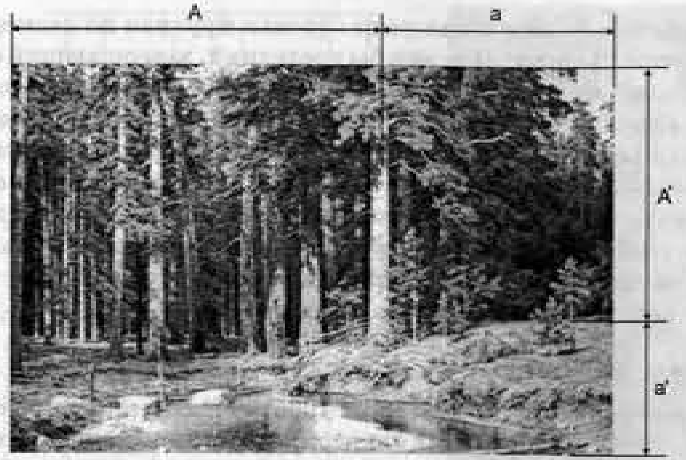


Рис. 1.32. Гармонический анализ картины И. Шишкина «Корабельная роща»

трепетную радость бытия, не нарушая при этом впечатления разлитого в природе покоя. Прекрасно написана поляна справа с побуревшей от солнца травой, сухой почвой и насыщенной по цвету молодой порослью. Разнообразные, выявляющие форму и фактуру мазки подчеркивают мягкость травы, пушистость хвои, крепость стволов.

Исследуя композиционную структуру картин — шедевров мирового изобразительного искусства, — искусствоведы обратили внимание на тот факт, что в пейзажных картинах широко используется закон Золотого сечения. Блестящим примером использования этого закона является картина И. И. Шишкина «Корабельная роща» (рис. 1.32 и рис. 10 на цветной вклейке).

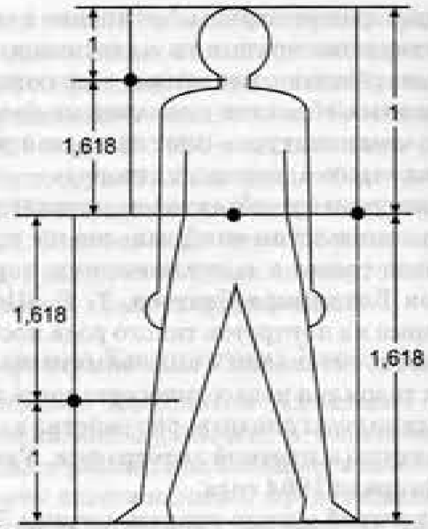
На этой знаменитой картине с очевидностью просматриваются мотивы Золотого сечения. Ярко освещенная солнцем сосна (стоящая на первом плане) делит картину Золотым сечением по горизонтали. Справа от сосны — освещенный солнцем пригорок. Он делит картину Золотым сечением по вертикали. Слева от главной сосны находится много сосен — при желании можно с успехом продолжить деление Золотым сечением по горизонтали левой части картины. Наличие в картине ярких вертикалей и горизонталей, делящих ее в отношении Золотого сечения, придает ей характер уравновешенности и спокойствия в полном соответствии с замыслом художника.

Картина «Корабельная роща» (самая крупная по размерам в творчестве Шишкина) — как бы последний, завершающий образ в созданной им эпопее, символизирующей богатырскую русскую силу. Картина была написана художником под впечатлением природы родных мест, памятных Шишкину с детства. На рисунке к картине он сделал надпись «Афанасофская корабельная роща близ Елабуги». Этим полотном Иван Шишкин завершил свой творческий путь. 8 (20) марта 1898 года художник скончался в своей мастерской за мольбертом, на котором стояла новая, только что начатая картина «Лесное царство».

«Модулор» Корбюзье

Ле Корбюзье (*Le Corbusier*) (1887–1965) — выдающийся французский архитектор и теоретик архитектуры. В современной технике и серийности индустриального строительства он видел основу обновления архитектуры, стремился эстетически выявить функционально оправданную структуру сооружения. В зданиях, построенных Ле Корбюзье, торжествует новая архитектурная эстетика, жизнеутверждающая и глубоко человечная. Каждая новая постройка становится событием в художественном мире. Его произведения и проекты публикуются во всех архитектурных изданиях, он всюду пропагандирует новое слово в архитектуре. А когда в 1923 году выходит его книга «К архитектуре», Ле Корбюзье становится одним из ведущих теоретиков архитектуры XX столетия.

В годы Второй мировой войны создается «Модулор» — система новых пропорциональных отношений. Ле Корбюзье кладет в основу архитектурной метрики размеры человеческого тела. Причем берет не только средний рост человека, но и размеры сидящей фигуры, стопы человека, длину его руки, шага и т. д. «Модулор» не только теория, в нем содержится и подробно разработанное практическое руководство по применению человеческих пропорций в сопоставлении с общепринятой метрической системой расчета. Среди тех, кто первым оценил «Модулор», был великий Эйнштейн, считавший, что разработанная Ле Корбюзье система имеет большое практическое значение не только в архитектурном проектировании, но и в других видах человеческой деятельности. Из гармонического анализа «Модулора» Корбюзье (рис. 1.33 и рис. 12 на цветной вклейке) видно, что в нем явно просматриваются мотивы Золотого сечения.



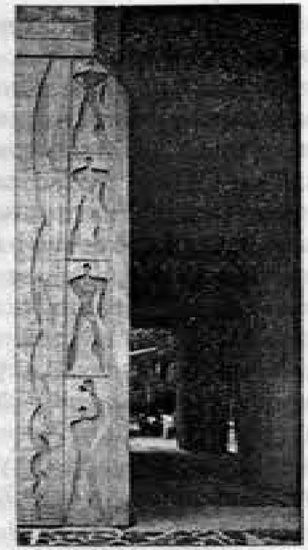


Рис. 1.33. *Корбюзье. Модулор*

Украинский скульптор Александр Архипенко

Александр Архипенко (1887–1964) — украинский художник, реформатор скульптуры. Он родился в Киеве 30 мая (11 июня) 1887 года в семье профессора механики. В 1902-м поступил в Киевское художественное училище, оставил его, не удовлетворенный системой преподавания. Уехав в Париж (1908), он поселился в колонии художников *La Ruche* («Улей»), где познакомился с А. Модильяни и А. Годье-Бжеско; испытал большое влияние скульптуры Древнего мира (Египта, Ассирии), а позднее готики. В Париже он стал членом творческой группы *Section d'Or* («Золотое сечение»), членами которой были выдающиеся скульпторы и художники, в частности Пабло Пикассо.

Рис. 1.34. *А. Архипенко.* Draped Woman (1911)

После выставочного тура по городам Европы Архипенко переехал в 1923 году в США. Утверждая принципы кинетического искусства, в 1927 году он запатентовал механизм, создающий иллюзию движения нарисованных объектов с заданными быстротой и ритмом. Вдобавок к «архипентуре» (как он назвал эти иллюзии) в 1940-е годы создал серию «светомодуляторов» — полупрозрачных, освещаемых изнутри арт-объектов из плексигласа. Наряду с этим не раз в эти десятилетия он обращался и к традиционной манере, в том числе также и к историческим портретам-олицетворениям (князя Владимира Святого, Т. Г. Шевченко, И. Я. Франко); некоторые из портретов такого рода посылал на выставки на родину, часть установил в виде памятников-бюстов в Кливленде. С 1920-х годов вел педагогическую деятельность, читал лекции. В последние годы плодотворно работал в области монументальной скульптуры и цветной литографии. Умер Архипенко в Нью-Йорке 25 февраля 1964 года.

Примером скульптуры, в которой можно увидеть мотивы Золотого сечения, является скульптура Александра Архипенко *Draped Woman* (рис. 1.34 и рис. 13 на цветной вклейке), созданная им в 1911 году, то есть в период его увлечения Золотым сечением.

Рис. 1.35. Здание штаб-квартиры ООН в Нью-Йорке

Здание штаб-квартиры ООН в Нью-Йорке

Сооружение этого всемирно известного здания (рис. 1.35) связано с именем **Оскара Нимейра** (*Niemeyer, Oscar*) (1907–1989), знаменитого бразильского архитектора XX века. В 1936-м под руководством Лючио Коста и Ле Корбюзье Нимейер вместе с группой молодых архитекторов проектировал здание министерства просвещения и здравоохранения в Рио-де-Жанейро. Постройка была завершена в 1943-м и привлекла тогда всеобщее внимание не только как общественное сооружение, созданное с применением новейших архитектурных средств, но и как первый пример использования сплошного солнцемодулирующего экрана на одном из фасадов. За пределами Бразилии Нимейером был построен Бразильский павильон на Всемирной выставке в Нью-Йорке в 1939 году. В 1974-м он выступил в роли главного консультанта при сооружении здания штаб-квартиры ООН в Нью-Йорке.

В этом здании также просматриваются мотивы Золотого сечения. В композиции здания четко выделяются три поставленных друг на друга золотых прямоугольника, которые и являются его главной архитектурной идеей.

Картина Константина Васильева «У окна»

Васильев Константин Алексеевич (1942–1976) — современный российский художник, к сожалению рано ушедший из жизни. Жил и работал под Казанью, в поселке Васильево. Получил известность патетическими, продолжающими традицию символизма и модерна полотнами на темы фольклора, древней и современной русской истории. Еще будучи студентом Казанского художественного училища, он впервые услышал о Золотом сечении. Узнав о композиционном Золотом сечении, которым пользовались древние греки, Константин решил «поверить алгеброй гармонию». Он вы-

Рис. 1.36. *К. Васильев.* У окна

числил, как должна строиться любая картина, где мысленно нужно размещать ту главную точку на полотне, к которой, словно к центру, должны тянуться все сюжетные линии, и как по «узлам» вычерченной им координатной сетки корректировать расположение любых элементов композиции.

С чего начинать картину? Всю информацию по этому вопросу художники за ненадобностью давно растеряли. Единственное, что было известно всякому образованному человеку, — это существующая числовая связь построения всего сущего в природе, открытая Пифагором. Связь, на которую намекал еще Платон, говоря, что суть красоты в отношении частей друг к другу и к целому. Применительно к линейным отрезкам открытие Пифагора выглядит просто: меньшая часть относится к большей, как большая ко всему отрезку. Леонардо да Винчи назовет это соотношение Золотым сечением. Всякий истинный художник чувствует эти соотношения, интуитивно выходит на них и пишет, что называется, «в золоте».

Но Васильева интересовали не пропорции человеческого тела, он искал возможности пользоваться законами гармонии на всей плоскости картины, чтобы добиться максимального охвата художественного образа. Он использовал различные числа Фибоначчи, выражающие Золотое сечение, с их помощью намечал отрезки, хорды, перемещая все это на плоскости.

Наконец, используя золотую спираль, Васильев определил для себя, в какой последовательности человеческий глаз воспринимает сюжет картины. То есть он вычислил, как должна строиться любая картина, где мысленно размещать ту главную точку на полотне, к которой, словно к центру, должны стягиваться, как к невидимому магниту, все сюжетные линии картины.

Наиболее ярким примером картины, построенной по принципу Золотому сечению, является картина Васильева «У окна» (рис. 1.36 и рис. 11 на цветной вклейке).

О чем хотел поведать нам художник в этой картине? Об этом можно лишь догадываться. Одно бесспорно: перед нами жизнь как она есть. То, что двое этих молодых людей бесконечно любят друг друга, мы понимаем при первом взгляде на картину. Но если юноша весь во власти своего неудержимого порыва, готов отстаивать свою любовь перед кем угодно, то чувства девушки что-то сдерживает. Что именно: страх, гордыня, верность родовым традициям? Может быть, наитие, природное чутье, более свойственное женскому сердцу, подсказывает ей, что не время им сейчас думать о любви?

Как бы то ни было, главная мысль этой картины, вся кульминация ее заложена именно в образе девушки, чье лицо озарено удивительной чистотой, достоинством и еще спокойной мудростью. И лицо девушки художник разместил в «золотой» точке картины, которая находится на пересечении двух «золотых» линий — горизонтальной и вертикальной, пересечение которых в точности проходит через глаз девушки. И это композиционное решение является одной из причин ощущения удивительной гармонии, которой наполнена картина, олицетворяющая все те начала, которые всегда делали русскую женщину прекрасной.

Творчество украинского архитектора Олега Боднара

13 декабря 1997 года в родовом селе митрополита Андрея Шептицкого Прилбичах произошло посвящение места под строительство церкви. Проект церкви-музея в Прилбичах (рис. 1.37) создал украинский архитектор Олег Боднар, доктор искусствоведения, профессор Львовской академии искусств.

Рис. 1.37. Церковь-музей в с. Прилбичах (Украина) (архитектор Олег Боднар)

Рис. 1.38. Книга Олега Боднара «Золотий переріз і неевклідова геометрія в науці та мистецтві» (2005)

Олег Боднар в 1972 году закончил архитектурный факультет Львовского политехнического института. С 1992 года — доктор искусствоведения. В настоящее время заведует кафедрой Львовской Национальной академии искусств. Основные направления научных исследований — теория формообразования, проблемы структурной гармонии систем. Олег Боднар является одной из наиболее ярких звезд на небосклоне украинской науки.

В области Золотого сечения его главной публикацией является книга «Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве» (1994). В 2005 году эта книга переиздана на украинском языке (рис. 1.38).

В книге впервые после обнародования сто лет назад Германом Минковским его геометрической интерпретации специальной теории относительности представлена новая сенсационная информация о реализации в природе закономерностей неевклидовой геометрии. На этот раз — в живой природе, в частности в процессе роста спирально-симметричных (так называемых филлотаксисных) растительных форм.

При детальной математической расшифровке этого процесса неожиданно обнаруживается участие в нем Золотого сечения — магического числа, с которым в истории науки и искусства всегда связывались представления о гармонии и совершенстве. Таким образом, в центре сюжета книги — научное открытие, касающееся наиболее общих законов природы и свидетельствующее о фундаментальной связи между разными направлениями научного познания, которые, казалось бы, уже давно и навсегда утратили такую связь. В этом контексте упоминаются имена А. Эйнштейна, В. И. Вернадского, Ле Корбюзье.

1.15. Формула красоты

Золотое сечение во внешних формах человека

Сколько художников, поэтов, скульпторов, истинных ценителей прекрасного восхищались красотой человеческого тела! Утверждал же гениальный французский скульптор О. Роден:

«Обнаженное тело кажется мне прекрасным. Для меня оно — чудо, где не может быть ничего безобразного».

Человек — высшее творение Природы, поэтому человеческое тело считалось во все времена высшим и достойным объектом искусства скульптуры, и правильно изобразить человеческое тело в его пропорциях было всегда одной из наиболее достойных художественных задач. Уже тысячелетия люди пытаются найти математические закономерности в пропорциях тела человека, прежде всего человека хорошо сложенного, гармоничного. На протяжении многих веков отдельные части тела человека служили единицами длины. Так, у древних египтян было три единицы длины. *Локоть* (466 мм) равнялся семи *ладоням* (66,5 мм); ладонь же, в свою очередь, равнялась четырем *пальцам*. Основными мерами длины в России были *сажень* и *локоть*, связанные с ростом человека; кроме того, применялся *дюйм* — длина сустава большого пальца, а также *пядь* — расстояние между раздвинутыми большим и указательным пальцами и *ладонь* — ширина кисти руки.

Еще в Древнем Египте за единицу измерения тела принимали длину стопы. При этом высота человека составляла в среднем семь длин его стопы. В соответствии с эстетическим каноном греческого скульптора Поликлета единицей измерения тела служила голова; длина тела должна равняться восьми размерам головы.

Золотая пропорция занимает ведущее место в художественных канонах Леонардо да Винчи и Дюрера. В соответствии с этими канонами золотая пропорция отвечает делению тела на две неравные части линией талии. То есть самый простой вид осуществления Золотого сечения заключается в том, что все тело линией пупа должно делиться в отношении Золотого сечения. Точно так же при вытянутых по швам руках кончики средних пальцев должны весь рост человека делить в отношении Золотого сечения. Известное правило, что лоб, нос и нижняя часть лица должны быть равны, дополняется тем, что рот делит нижнюю часть тела в отношении Золотого сечения. Брови делят всю голову в отношении Золотого сечения и т. д.

Пальцы человека состоят из трех фаланг: основных, средних и ногтевых. Длина основных фаланг всех пальцев, кроме большого, равна сумме длин двух остальных фаланг, а длины всех фаланг каждого пальца относятся друг к другу по правилу золотой пропорции.

На рис. 1.39, *а* показана человеческая фигура, в которой соблюдены указанные выше пропорции Золотого сечения. Она нам кажется гармоничной и совершенной. На рис. 1.39, *б*, *в* приведены примеры человеческих фигур, которые нам кажутся негармоничными, непропорциональными. На рис. 1.39, *б* человек имеет длинное туловище и короткие ноги, то есть линия пупа сдвинута вниз по отношению к гармоничному телу на рис.1.39, *а*. Тело человека на рис.1.39, *в* также кажется нам негармоничным, так как оно имеет короткое туловище и длинные ноги, то есть линия пупа сдвинута вверх по отношению к гармоничному телу, показанному на рис. 1.39, *а*.

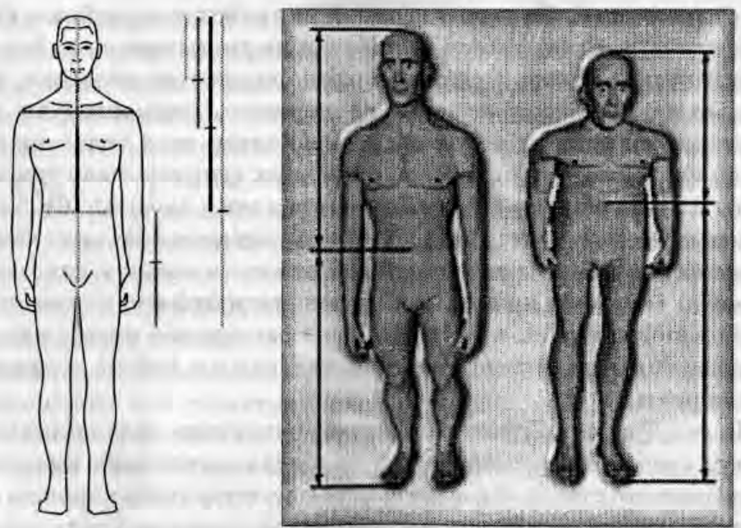


Рис. 1.39. Пропорции человеческого тела: а) — гармоническое тело: линия пупа делит тело золотым сечением, б) — пример негармонического тела: длинное туловище и короткие ноги, в) — другой пример негармоничного тела: длинные ноги и короткое туловище

Красота женского лица

В своей книге *Homo pylcher* («Человек прекрасный») философ Н. И. Крюковский пишет:

> «Созерцая совершенное, прекрасное человеческое лицо и тело, невольно приходишь к мысли о каком-то скрытом, но явственно чувствующемся математическом изяществе его форм, о математической правильности и совершенстве составляющих его криволинейных поверхностей!»

В 1912 году в Эль-Амарне (Египет) была раскопана мастерская ваятеля Тутмеса со скульптурным портретом древнеегипетской царицы Нефертити.

Некоторые исследователи считают, что Нефертити (в переводе это слово означает «красавица грядет»), супруга царя-преобразователя Аменхотепа IV, по происхождению была из скифов. Древнеегипетский ваятель Тутмес в XIV веке до н. э. создал из раскрашенного гипса необыкновенный по выразительности и психологической глубине портрет царицы. Этот скульптурный шедевр ныне известен на весь мир и хранится в одном из музеев Берлина. В наше время он стал, можно сказать, визитной карточкой Древнего Египта — его культуры в целом, искусства, магии, символики, принципов обработки материала.

Гармонический анализ скульптурного портрета Нефертити был проведен недавно белорусским философом Эдуардом Сороко. Сороко определил опорные базисные точки, в которых так или иначе меняется конфигурация линий, завершается изгиб той или иной из них, находит характерный излом контурное очертание, деталь убранства и обнаружил при этом стройную вписанную в портрет систему правильных простых геометрических фигур — треугольников, квадратов, ромбов (см. рис. 1.40). Стороны этих фигур, если их упорядочить по размеру, находятся в одном и том же отношении — Золотом сечении, и не только стороны, но и отдельные фрагменты этих сторон, образуемые пересекающими их линиями.

8–2391

Сороко пишет:

«Если современные художники нередко ловят случайное, мимолетное в изображаемом материале, то древнеегипетский мастер, как показывает структурный анализ произведения, сознательно геометризовал начальный каркас портрета, насытив его правильными геометрическими фигурами, подчинив их иерархию закону золотой пропорции. Век машин, четких стандартов, в котором нашла свое оформление технология индустриализации, был еще очень далеко. И душа Тутмеса стремилась в симметрично-правильных, геометризованных конструкциях выразить красоту того, что, казалось бы, никак не подчиняется математической строгости и правильности — особенности женского облика. Разумеется, по завершении работы каркас был убран, упрятан в материале так, что не оставалось и намека на жесткость геометрического закона, управляющего структурной состоятельностью образа. И кажется, что красота и легкость произведения возникла сама по себе, предопределена самой природой натуры, точнее, ее образа, но никак не скрытыми в нем и скрепляющими его геометрическими формами. Такова тайна и магия подлинного искусства древнеегипетского мастера, которого можно назвать Учителем и для современных ваятелей».

Неоднократно делались попытки провести гармонический анализ женского лица с использованием Золотого сечения и пентакла (рис. 1.41). Все исследователи сходятся на том, что именно Золотое сечение и есть главная причина красоты женского лица.

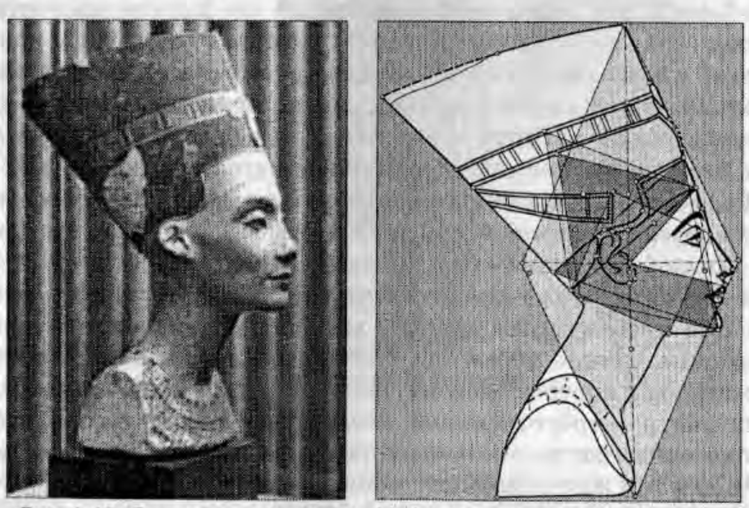


Рис. 1.40. Скульптурный портрет Нефертити и его гармонический анализ, выполненный Э. М. Сороко

а) б) в) г)

Рис. 1.41. Гармонический анализ женского лица

Женское лицо отображает бесконечное число эмоций, которые являются интегральным элементом женской красоты. Доказано, что женское лицо наиболее отвечает пропорциям Золотого сечения, когда женщина улыбается. Женщина воспринимается более красивой с теплой улыбкой, чем с жестким взглядом, наполненным гневом, надменностью и пренебрежением. Эти «принципы Золотого сечения» необходимо хорошо знать покорительницам мужских сердец.

1.16. Золотое сечение в музыке

Пифагорейская теория музыкальной гармонии

Музыка — вид искусства, который отражает действительность и воздействует на человека посредством осмысленных и особым образом организованных звуковых последовательностей, состоящих из тонов. Сохраняя некоторое подобие звуков реальной жизни, музыкальные звучания принципиально отличаются от последних строгой высотной и временной (ритмической) организованностью («музыкальная гармония»). Начиная с античного периода выяснение законов музыкальной гармонии является одним из важных направлений научных исследований.

То, что греки писали о музыке, не совсем соответствует характеру современного музыковедения. Античное музыкознание не ставило своей задачей анализ конкретных музыкальных сторон музыкальных произведений. Оно видело свою задачу в изучении акустических сторон звучащей музыки. Характерной особенностью античной науки о музыке было стремление к математическому описанию музыкальной гармонии.

Пифагору приписывают установление двух основных законов гармонии в музыке.

1. Если отношение частот колебаний двух звуков описывается малыми числами, то они дают гармоническое звучание.
2. Чтобы получить гармоническое трезвучие, нужно к аккорду из двух консонансных звуков добавить третий звук, частота колебаний которого находится в гармонической пропорциональной связи с двумя первыми.

Значение работ Пифагора по научному объяснению основ музыкальной гармонии трудно переоценить. Это была первая научно обоснованная теория музыкальной гармонии. Познав истинность и красоту своей музыкальной теории, Пифагор пытался распространить ее на космологию; по его представлениям, и планеты Солнечной системы располагались в соответствии с музыкальной октавой («гармония сфер»).

Вокруг акустических экспериментов Пифагора существовало много легенд. Наиболее популярная из них повествует о том, как он, проходя мимо кузницы, услышал звуки молотков о наковальню и распознал в них октаву, квинту и кварту. Обрадованный, Пифагор поспешил в кузницу и после серии экспериментов с молотками установил, что разница в звуках зависит от веса молотков. Прикрепив к четырем струнам грузы, пропорциональные весу молотков, Пифагор таким путем получил октаву, квинту и кварту.

Следует заметить, что установление пифагорейцами связи между музыкой и математикой повлекло за собой включение гармоники в число математических наук и предопределило все дальнейшее развитие античной науки о музыке.

Золотого сечение в этюдах Шопена

Любое музыкальное произведение имеет временное протяжение и делится некоторыми «эстетическими вехами» на отдельные части, которые обращают на себя внимание и облегчают восприятие целого. Этими вехами могут быть динамические и интонационные кульминационные пункты музыкального произведения. Существуют ли какие-либо закономерности возникновения «эстетических вех» в музыкальном произведении? Попытка ответить на этот вопрос была предпринята русским музыковедом Л. Сабанеевым. В большой статье «Этюды Шопена в освещении Золотого сечения» (1925) он показывает, что отдельные временные интервалы музыкального произведения, соединяемые «кульминационным событием», как правило, находятся в соотношении Золотого сечения. Сабанеев пишет:

> «Все такие события инстинктом автора приурочиваются к таким пунктам длины целого, что они собою делят временные протяжения на отдельные части, находящиеся в отношениях «Золотого сечения». Как показывают наблюдения, приурочение подобных эстетических «вех» к пунктам деления общего или частичного протяжения в «золотом» отношении выполняется нередко с огромной точностью, что тем более удивительно, что при отсутствии у поэтов и у авторов музыки всякого знания о подобных вещах, это все является исключительно следствием внутреннего чувства стройности».

Анализ огромного числа музыкальных произведений позволил Сабанееву сделать вывод о том, что организация музыкального произведения построена так, что его кардинальные части, разделенные вехами, образуют ряды Золотого сечения. Такая организация произведения соответствует наиболее экономному восприятию массы отношений в музыкальном произведении и поэтому производит впечатление наивысшей «стройности» формы. По мнению Сабанеева, количество и частота использования Золотого сечения в музыкальной композиции зависит от «ранга» композитора. Наиболее высокий процент совпадений отмечается у гениальных композиторов, то есть «интуиция формы и стройности, как это и следует ожидать, наиболее сильна у гениев первого класса».

По наблюдениям Сабанеева, в музыкальных произведениях различных композиторов обычно констатируется не одно Золотое сечение, сопряженное с происходящим возле него «эстетическим событием», а целая серия подобных сечений. Каждое такое сечение отражает свое музыкальное событие, качественный скачок в развитии музыкальной темы. В изученных им 1770 сочинениях 42 композиторов наблюдалось 3275 Золотых сечений; количество произведений, в которых наблюдалось хотя бы одно Золотое сечение, составило 1338.

Наибольшее количество произведений, в которых имеется Золотое сечение, у Аренского (95 %), Бетховена (97 %), Гайдна (97 %), Моцарта (91 %), Скрябина (90 %), Шопена (92 %), Шуберта (91 %).

Наиболее детально были изучены Сабанеевым все 27 этюдов Шопена. В них обнаружено 154 Золотых сечения; всего в трех этюдах Золотое сечение отсутствовало. В некоторых случаях строение музыкального произведения сочетало в себе симметричность и Золотое сечение одновременно; в этих случаях оно делилось на несколько симметричных частей, в каждой из которых появлялось Золотое сечение. У Бетховена также сочинения делятся на две симметричные части, а внутри каждой из них наблюдается проявление Золотого сечения.

Исследования Розенова

Большое внимание исследованию законов музыкальной гармонии уделял известный русский искусствовед Э. К. Розенов. Он утверждал, что в музыкальных произведениях и поэзии существуют строгие пропорциональные отношения:

> «Явные черты "природного творчества" мы должны признать в тех случаях, когда в сильно одухотворенных созданиях гениальных авторов, порожденных мощным стремлением духа к правде и красоте, мы совершенно неожиданно обнаруживаем какую-то неподдающуюся непосредственному сознанию таинственную закономерность числовых отношений».

Э. Розенов считал, что Золотое сечение должно играть в музыке выдающуюся роль как средство для приведения однородных явлений в соответствие, созданное самой природой:

> «Золотое деление могло бы: устанавливать в музыкальном произведении изящное, соразмерное отношение между целым и его частями; являться специальным местом подготовленного ожидания, совмещаясь с кульминационными пунктами (силы, массы, движения звуков) и с разного рода выдающимися, с точки зрения автора, эффектами; направлять внимание слушателя на те мысли музыкального произведения, которым автор придает наиболее важное значение, которые желает поставить в связь и соответствие между собой».

Розенов выбирает для анализа ряд типичных произведений выдающихся композиторов: Баха, Бетховена, Шопена, Вагнера. Например, исследуя Хроматическую фантазию и фугу Баха, за единицу меры во времени была принята длительность четверти. В этом произведении содержится 330 таких единиц меры. Золотое деление этого интервала приходится на 204-ю четверть от начала. Этот момент Золотого сечения точно совпадает с ферматой (в нотной грамоте знак ферматы увеличивает длительность звука или паузы обычно в 1,5–2 раза), которая отделяет первую часть произведения (прелюдию) от второй. Поразительную соразмерность частей демонстрирует также фуга, следующая за фантазией. При взгляде на схему гармоничного анализа фуги «невольно приходишь в священный трепет перед гениальностью мастера, воплотившего силою художественной чуткости до такой степени точности сокровенные законы природного творчества».

Э. Розеновым подробно были разобраны: финал сонаты *cis moll* Бетховена, *Fantasia-Impromtu* Шопена, вступление к «Тристану и Изольде» Вагнера. Во всех этих произведениях Золотое сечение встречается очень часто. Особое внимание автор обращает на фантазию Шопена, которая была создана экспромтом и не подлежала никакой правке, а значит, и не было сознательного применения закона Золотого сечения, которое присутствует в этом музыкальном произведении вплоть до мелких музыкальных образований.

Итак, можно признать, что золотая пропорция является критерием гармонии композиции музыкального произведения.

Использовал ли Моцарт Золотое сечение?

Антонин Дворжак, чешский композитор XIX столетия, сказал, что «Моцарт является солнечным светом». Как удавалось композитору создавать у слушателей такое ощущение, никто не знает наверняка. Возможно, он полагался на свою музыкальную гениальность или вдохновлялся окружающими событиями. С другой стороны, он мог бы сочинять музыку, основываясь на математических уравнениях.

Существуют убедительные свидетельства, что Моцарт увлекался математикой. Согласно свидетельствам его сестры, Вольфганг «ничего не говорил, ни о чем не думал, кроме арифметики» в течение его школьных лет. Кроме того, он записывал математические уравнения на полях некоторых своих сочинений, включая *Fantasia and Fugue in C Major*, где он вычислял свою долю в лотерее. Хотя эти уравнения не касались его музыки, они в то же время свидетельствуют о его внимании к математике.

Музыка Моцарта привлекла внимание Джона Ф. Путца, математика из Альма-колледжа. «Мой сын, композитор и пианист, сказал, что фортепианные сонаты Моцарта разделяются на две различные части, — вспоминает Путц. — Я знал, что музыка Моцарта высоко оценивается благодаря ее изящным пропорциям, так что я думаю, было бы интересно проверить, отвечают ли части пропорции Золотого сечения».

Во времена Моцарта сонатная форма реализовывалась в двух частях: «экспозиции», в которой вводилась музыкальная тема, и «разработке» («рекапитуляции»), в которой музыкальная тема развивавалась и повторялась. Это разделение сонаты на две части является причиной постановки вопроса о том, как Моцарт осуществлял разделение этих частей. То есть разделял ли Моцарт свои сонаты по принципу Золотого сечения, когда «экспозиция» представляла собой более короткий сегмент сонаты, а «разработка» более длинный?

В первой части произведения Моцарта *Sonata 1 in C Major*, например, «экспозиция» и «разработка» содержат соответственно 38 и 62 такта. Это совершенное деление, соответствующее Золотому сечению, в следующем смысле: музыкальная часть в 100 тактов не может быть разделена натуральными числами ближе к Золотому сечению, чем с помощью чисел 38 и 62. Такая же хорошая аппроксимация к Золотому сечению существует во второй части этой сонаты. Такие же результаты были получены и при анализе других сонат Моцарта.

1.17. Обобщенные золотые пропорции

Обобщение задачи о Золотом сечении

В течение многих тысячелетий Золотое сечение считалось уникальным, единственным и неповторимым иррациональным числом, обладающим удивительными математическими свойствами, которые рассмотрены выше. Но в последней четверти XX века профессором Стаховым было сделано важное открытие в теории Золотого сечения, которое до конца не осознано современной наукой. Речь идет об *обобщении задачи о Золотом сечении*, которое впервые изложено в книге А. П. Стахова «Введение в алгоритмическую теорию измерения» (1977).

Суть этого открытия, о котором упоминает академик Митропольский в предисловии к этой книге, состоит в следующем. Зададимся целым неотрицательным числом $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$ и разделим отрезок AB точкой C в следующей пропорции (рис. 1.42):

$$\frac{CB}{AC} = \left(\frac{AB}{CB}\right)^p. \qquad (1.37)$$

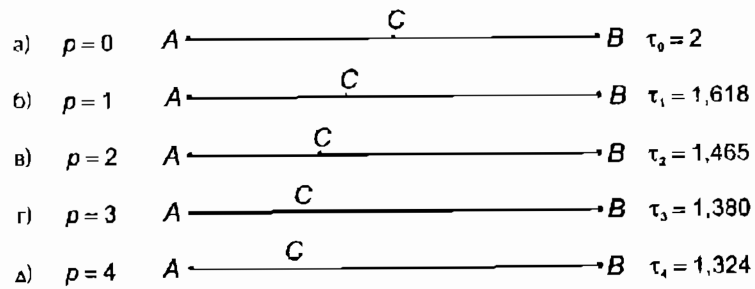


Рис. 1.42. Золотые p-сечения ($p = 0, 1, 2, 3, \ldots$)

Если теперь обозначить $AB/CB = x$ и учесть при этом, что $AB = AC + CB$, то отношение $AB/CB = x$ можно будет представить в виде:

$$x = \frac{AC + CB}{CB} = 1 + \frac{1}{\frac{CB}{AC}}. \qquad (1.38)$$

Учитывая введенное выше обозначение $AB/CB = x$ и пропорцию (1.37), выражение (1.38) можно записать в виде:

$$x = 1 + \frac{1}{x^p},$$

откуда непосредственно вытекает следующее алгебраическое уравнение:

$$x^{p+1} = x^p + 1. \tag{1.39}$$

Положительный корень этого уравнения τ_p мы будем в дальнейшем называть *обобщенной золотой пропорцией* или *золотой р-пропорцией*, а деление отрезка в отношении (1.37) — *золотым р-сечением*.

Исследуем частные случаи уравнения (1.39). Ясно, что при $p = 0$ уравнение (1.39) сводится к тривиальному уравнению:

$$x = 2. \tag{1.40}$$

Это уравнение имеет единственный корень $\tau_0 = 2$. При этом деление отрезка в отношении (1.37) сводится к «дихотомии», то есть делению отрезка пополам (рис. 1.42, *а*).

Рассмотрим теперь случай $p = 1$. Ясно, что для этого случая уравнение (1.39) сводится к знаменитому уравнению (1.2), положительный корень которого τ_1 совпадает с золотой пропорцией, то есть

$$\tau_1 = \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Заметим, что для этого случая деление отрезка в отношении (1.37) сводится к классическому Золотому сечению (рис. 1.42, *б*). И теперь нам становится ясен смысл названий *«золотое р-сечение»* и *«золотая р-пропорция»*.

При остальных значениях p мы получаем бесконечное число некоторых пропорциональных делений отрезка в отношении (1.37). В частности, легко доказать, что при $p \to \infty$ золотая p-пропорция $\tau_p \to 1$.

С учетом вышеизложенного можно привести значения золотых p-пропорций для некоторых значений p (табл. 1.1).

Таблица 1.1. Значения золотых р-пропорций

p	0	1	2	3	4	...	∞
τ_p	2	1,618	1,465	1,380	1,324	...	1

Таким образом, между двумя числовыми константами 2 и 1 на числовой оси находится бесконечное число новых иррациональных чисел, золотых p-пропорций, которые выражают более сложные «гармонии», чем классическая золотая пропорция $\tau = 1,618$. То есть золотых пропорций существует бесконечное количество. Это первый методологический вывод, который вытекает из открытия профессора Стахова.

Некоторые алгебраические свойства золотой р-пропорции

Подставляя золотую p-пропорцию τ_p вместо x в уравнение (1.39), получим следующее тождество для золотой p-пропорции:

$$\tau_p^{p+1} = \tau_p^p + 1. \tag{1.41}$$

Разделив все члены тождества (1.41) на τ_p^p, получим следующие замечательные свойства золотой p-пропорции:

$$\tau_p = 1 + \frac{1}{\tau_p^p}, \tag{1.42}$$

или

$$\tau_p - 1 = \frac{1}{\tau_p^p}. \tag{1.43}$$

Заметим, что для случая $p = 0$ ($\tau_0 = 2$) тождества (1.42) и (1.43) вырождаются в следующие тривиальные тождества:

$$2 = 1 + \frac{1}{1} \text{ и } 2 - 1 = \frac{1}{1}.$$

При $p = 1$ $\tau_1 = \tau = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

В этом случае тождества (1.42), (1.43) вырождаются в замечательные тождества (1.4), (1.5), хорошо известные в теории Золотого сечения.

Будем теперь многократно умножать и делить все члены тождества (1.41) на τ_p; в результате получим следующее замечательное тождество, связывающее степени золотой p-пропорции:

$$\tau_p^n = \tau_p^{n-1} + \tau_p^{n-p-1} = \tau_p \tau_p^{n-1}, \tag{1.44}$$

где n принимает значения из множества: $\{0, \pm1, \pm2, \pm3, ...\}$.

Таким образом, введенное выше понятие золотой p-пропорции, действительно представляет общематематический интерес, а теория золотой p-пропорции включает в себя в качестве частных случаев теорию двоичных чисел и теорию классической золотой пропорции.

Связь с сакральной геометрией

Возвращение к Богу, к сакральной геометрии, к эзотерическим наукам и священным знаниям, содержащимся в Талмуде, Библии, китайской Книге Перемен, сближение религиозного и научного мировоззрений являются одной из наиболее характерных особенностей современного этапа в развитии человеческой культуры. И естественно, что в нашей книге мы не можем пройти мимо этих «священных знаний», одним из которых является Золотое сечение.

Начнем с сакральной геометрии. При изложении ее принципов и фундаментальных отношений мы будем следовать замечательной книге С. М. Неаполитанского и С. А. Матвеева «Сакральная геометрия» (2003).

Как подчеркивается в этой книге, сакральная геометрия — это путь познания Вселенной и человека. Пифагор относился к сакральной геометрии как к «самой сокровенной науке Бога». Сама Природа пользуется ее достижениями. И эти примеры мы находим всюду: от спиралей раковины и маленьких цветков маргаритки до шестиугольных пчелиных сот и расположения семян в головке подсолнечника «по Фибоначчи». Термин «сакральная геометрия» используется археологами, антропологами, философами и людьми, чья деятельность связана с духовной деятельностью. Его применяют для того, чтобы охватить систему религиозных, философских и духовных воззрений, которые выработаны различными культурами на протяжении всей человеческой истории и так или иначе связаны с геометрическими представлениями об устройстве Вселенной и человека.

Одна из наиболее поразительных идей, которая пронизывает сакральные учения всех цивилизаций, состоит в том, что Вселенная существует как гармоническое и пропорциональное целое, а основой прекрасного является гармония. Египетская богиня Маат представляла собой воплощение принципа естественного порядка вещей, пропорциональной меры и баланса как вечной истины природы. Греки, учившиеся у египтян, связали с цивилизацией слово «Космос», буквально переводимое как «вышивка» и выражающее присущие миру гармонию и красоту.

Пять основных отношений сакральной геометрии

Как подчеркивается в упомянутой выше книге Неаполитанского и Матвеева, «существует группа пяти основных математических отношений, которые можно найти во всем мире — от японских пагод до Саянских храмов в Юкатане, от Стоунхеджа до великих Пирамид. Знание этих отношений закладывает базис постижения священной геометрии». Рассмотрим эти отношения. При этом пять основных отношений сакральной геометрии выражаются следующими иррациональными числами.

1. Число π, которое является основной пропорцией круга или сферы.

2. Квадратный корень числа 2: $\sqrt{2} = 1{,}414$. Он связан с такой священной фигурой, как квадрат. Как известно, с этим числом связано открытие несоизмеримых отрезков. Это открытие привело к разработке теории иррациональностей и иррациональных чисел и в конечном счете — к созданию «непрерывной» математики.

3. Квадратный корень числа 3: $\sqrt{3} = 1{,}732$. Это число выражает пропорции такой священной фигуры, как равносторонний треугольник, который является одним из самых ранних известных человечеству мистических символов. Платон указывал: «Среди множества треугольников есть один, прекраснейший, ради которого мы остановим все прочие, а именно тот, который в соединении с подобным ему образует третий треугольник — равносторонний». Равносторонний треугольник обладает наилучшими излучающими свойствами. Сама форма этого треугольника определяет его прекрасные качества как генератора лучистой энергии на большие расстояния. К. Э. Циолковский выдвигал идею вырубки в сибирской тайге гигантского равностороннего треугольника для установления контактов с внеземными цивилизациями.

4. Квадратный корень числа 5: $\sqrt{5} = 2{,}236$. Это число появляется при исследовании такой священной фигуры, как «двойной» квадрат (рис. 1.3).

5. Золотое сечение, или код да Винчи, выражающий пропорции золотого прямоугольника и пентакла, который пифагорейцы считали священной фигурой и главным символом их священного союза:

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618.$$

Итак, существует пять мистических геометрических отношений: число π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ и число τ (Золотое сечение). Они присутствуют во всех священных местах на земле и служат основой всех сакрально-геометрических построений. Эти символы сакральной геометрии переносят принципы мироустройства в нашу область понимания. Они показывают шаблоны основных законов Творца, которые исходят от Высшего Разума. Мудрость Природы предлагает лучший пример того, как следует жить. Эта мудрость передается через символы сакральной геометрии. Чем лучше мы их понимаем, тем больше можем применить силу гармонии в собственной жизни.

Золотые p-прямоугольники

А теперь покажем, что понятие золотой p-пропорции имеет прямое отношение к сакральной геометрии. Для этого рассмотрим прямоугольник с отношением сторон $\tau_p : 1$ (рис. 1.43).

Рассмотрим теперь, к чему сводится золотой p-прямоугольник на рис. 1.43 для частных случаев значения p.

Пусть $p = 0$. В этом случае золотая 0-пропорция $\tau_0 = 2$ и тогда золотой 0-прямоугольник будет представлять собой не что иное, как «двойной» квадрат (рис. 1.3), который считается священной фигурой и порождает священное число $\sqrt{5}$.

Пусть теперь $p = 1$. В этом случае золотой p-прямоугольник сводится к такой священной фигуре, как золотой прямоугольник (рис. 1.4), который выражает еще одно священное число — золотую пропорцию, или код да Винчи. Наконец, при $p \to \infty$ $\tau_p \to 1$, и тогда золотой p-прямоугольник вырождается в такую

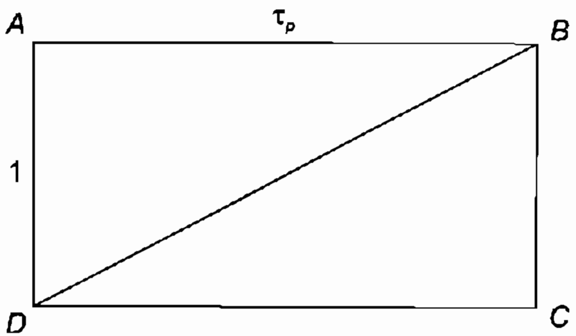


Рис. 1.43. Золотой p-прямоугольник (p = 0, 1, 2, 3, ...)

священную фигуру, как квадрат, который связан со священным числом $\sqrt{2}$.

Таким образом, по крайней мере три ($\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$, τ) из пяти основных геометрических отношений сакральной геометрии имеют непосредственное отношение к понятию «золотая p-пропорция». Одно из предложений состоит в том, чтобы понятие золотой p-пропорции ввести в священную геометрию в качестве одного из основных геометрических отношений сакральной геометрии, что создаст новые стимулы для ее развития.

1.18. Обобщенный принцип Золотого сечения и закон структурной гармонии систем

Числовая гармония пифагорейцев

Пифагорейцы впервые выдвинули мысль о гармоническом устройстве всего мира, включая сюда не только Природу и человека, но и весь Космос. Согласно пифагорейцам, «гармония представляет собою внутреннюю связь вещей, без которой Космос не смог бы существовать». Наконец, согласно Пифагору, гармония имеет численное выражение, то есть она интегрально связана с концепцией числа. Пифагорейцы создали учение о созидательной сущности числа. Аристотель в «Метафизике» отмечает именно эту особенность пифагорейского учения:

> «Так называемые пифагорейцы, занявшись математическим науками, впервые двинули их вперед и, воспитавшись на них, стали считать их началами всех вещей... Так как, следовательно, все остальное явным образом уподоблялось числам по всему своему существу, а числа занимали первое место во всей природе, элементы чисел они предположили элементами всех вещей и Вселенную [признали] гармонией и числом».

Пифагорейцы признавали, что форма мира должна быть гармонической, а все элементы мироздания («стихии») связаны с гармоническими фигурами. Пифагор учил, что из куба возникла земля, из пирамиды (тетраэдра) — огонь, из октаэдра — воздух, из икосаэдра — вода, из додекаэдра — сфера Вселенной (то есть эфир).

С таким представлением о гармонии связано и знаменитое пифагорейское учение о «гармонии сфер». Пифагор и его последователи считали, что движение светил вокруг центрального мирового огня создает чудесную музыку, воспринимаемую не слухом, а разумом. Учение о «гармонии сфер», о единстве микро- и макрокосмоса, учение о пропорциях — все эти идеи и составляют основу пифагорейского учения.

Главный вывод, который вытекает из пифагорейского учения состоит в том, что **гармония объективна, она существует независимо от нашего сознания и выражается в гармоничном устройстве всего сущего, начиная с Космоса и заканчивая микромиром.**

Уравнение целостности и мистическая единица

В дальнейшем пифагорейское учение о гармонии мироздания было развито в работах великих мыслителей, таких, как Платон, Птолемей, Августин, Боэций, Кеплер, Лейбниц и других. Лейбницу принадлежит знаменитое учение о «предустановленной гармонии», которое было частью его философской системы и имело теологическую окраску. Лейбниц рассматривает гармонию как универсальный закон связи и красоты Вселенной. Он представлял гармонию как некоторое состояние, предопределенное Богом.

Свое отношение к гармонии Лейбниц выразил в следующих словах:

> «Преднамеренное устроение планет и животных более чем что-либо подтверждает мою систему предустановленной гармонии».

Этой же точки зрения придерживался и великий Ньютон. Как пишет известный физик Л. Розенфельд, Ньютон свято верил в то, что «регулярность явлений природы не может быть делом случая, в ней проявляется наличие верховной мудрости и верховного интеллекта, которые все задумали в соответствии со своим назначением и великой гармонии всего творения». И как признание власти законов гармонии над всем в природе звучат слова Эйнштейна:

> «Религиозность ученого состоит в восторженном преклонении перед законами гармонии».

Одна из грандиозных космологических концепций гармонии принадлежит английскому философу и эстетику Шефтсбери (1671–1713). По Шефтсбери, «гармония царит во всем мире, она является упорядочивающим и творческим началом всей природы и космоса». Одним из центральных понятий философии и эстетики Шефтсбери является понятие *целого*, оно означает универсальную связь и единство явлений и вещей. **Вся природа — это целесообразно и гармонично устроенное целое. И в природе и в искусстве отдельные вещи и явления существуют как часть целого, как момент в общей системе красоты и гармонии.**

В современной науке идеи Шефтсбери получили дальнейшее развитие в работах известного российского архитектора и исследователя гармонии Иосифа Шевелева. В книге «Метаязык живой природы» (2000) Шевелев исследует так называемый *алгоритм целостности*. Взяв за основу знаменитое изречение Гераклита «Из одного — все, из всего — одно», Шевелев попытался вывести из него наиболее общие принципы, лежащие в основе целостности живой природы. В качестве символа «целостности» Шевелев выбирает «единицу», или «монаду». Пифагорейцы учили, что единица обозначает дух, из которого происходит весь видимый мир; единица есть разум, добро, гармония, счастье; она соединяет в себе четное с нечетным и мужское с женским. Геометрически единица выражает точку. Пифагорейцы называли единицу «монадой» и считали ее матерью всех чисел.

Как известно, «Пифагорова единица», или «монада», обладает рядом уникальных математических свойств, над которыми мы, возможно, и не задумывались. Приведем некоторые из них.

1. Единица не относится ни к простым, ни к составным числам.
2. Каждое натуральное число имеет делителем единицу.
3. Единица является единственным натуральным числом, имеющим только один делитель.
4. Единица — единственное натуральное число, n-я степень которого равна тому же числу.
5. После умножения (или деления) какого-либо числа на 1 это число не меняется;
6. После деления какого-либо числа, не равного нулю, самого на себя получается 1. И не случайно именно единица в свое время так поразила Галилео Галилея. В своих «Беседах» он пишет:

> «Если какое-либо число должно являться бесконечностью, то этим числом должна быть единица; в самом деле, в ней мы находим условия и необходимые признаки, которым должно удовлетворять бесконечно большое число, поскольку оно содержит в себе столько же квадратов, сколько кубов и чисел вообще... Единица является и квадратом, и кубом, и квадратом квадрата и т. д. Отсюда заключаем, что нет другого бесконечного

числа, кроме единицы. Это представляется столь удивительным, что превосходит способность нашего представления».

Принцип дихотомии и принцип Золотого сечения

Выбрав единицу, или «монаду», в качестве символа «целостности» всего сущего, Шевелев попытался записать «уравнение Первосновы», то есть тождество, позволяющее выразить единицу в виде суммы простейших элементов и создать его динамическую модель.

Для этого можно использовать *принцип дихотомии*, который основывается на следующем простейшем тождестве, связывающем двоичные числа:

$$2^n = 2^{n-1} + 2^{n-1}, \tag{1.45}$$

где $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

Для случая $n = 0$ мы можем записать:

$$1 = 2^0 = 2^{-1} + 2^{-1}. \tag{1.46}$$

В книге Шевелева приведена следующая «динамическая» модель принципа дихотомии:

$$\begin{aligned}
&1 = 2^0 = 2^{-1} + 2^{-1}\\
&\qquad 2^{-1} = 2^{-2} + 2^{-2}\\
&\qquad\qquad 2^{-2} = 2^{-3} + 2^{-3}\\
&\qquad\qquad\qquad 2^{-3} = 2^{-4} + 2^{-4}\\
&1 = 2^0 = 2^{-1} + 2^{-2} + 2^{-3} + 2^{-4} + 2^{-5} + 2^{-6} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}
\end{aligned} \tag{1.47}$$

Она приводит нас к следующему тождеству, которое Шевелев называет *уравнением первоосновы*:

$$1 = 2^0 = 2^{-1} + 2^{-1} = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i}. \tag{1.48}$$

В основу уравнения первоосновы может быть положен также *принцип Золотого сечения*, который основывается на следующем тождестве, связывающем степени золотой пропорции:

$$\tau^n = \tau^{n-1} + \tau^{n-2}, \tag{1.49}$$

где $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

Для случая $n = 0$ мы можем записать:

$$1 = \tau^0 = \tau^1 + \tau^{-2}. \tag{1.50}$$

Используя тождества (1.49), (1.50), Шевелев конструирует следующую «динамическую» модель принципа Золотого сечения:

$$\begin{aligned}
&1 = \tau^0 = \tau^{-1} + \tau^{-2}\\
&\qquad \tau^{-2} = \tau^{-3} + \tau^{-4}\\
&\qquad\qquad \tau^{-4} = \tau^{-5} + \tau^{-6}\\
&\qquad\qquad\qquad \tau^{-6} = \tau^{-7} + \tau^{-8}\\
&1 = \tau^0 = \tau^{-1} + \tau^{-3} + \tau^{-5} + \tau^{-7} + \tau^{-9} + \tau^{-11} + \ldots = \sum_{i=1}^{\infty} \tau^{-(2i-1)}
\end{aligned} \tag{1.51}$$

Она приводит нас еще к одному уравнению первоосновы:

$$1 = \tau^0 = \tau^{-1} + \tau^{-2} = \sum_{i=1}^{\infty} \tau^{-(2i-1)}. \tag{1.52}$$

Заметим, что принцип дихотомии, задаваемый (1.47), (1.48), и принцип Золотого сечения, задаваемый (1.51), (1.52), имеют огромное количество приложений (деление биологических клеток, двоичная система счисления, численные методы решения алгебраических уравнений и т. д).

По мнению Шевелева, уравнения первоосновы (1.48), (1.52) имеют значение, далеко выходящее за пределы математических приложений.

Шевелев утверждает:

«Именно так строит себя живая природа. Все ее объекты возникают по этой схеме.

Из одного начального элемента возникает «все», и это «все» создает взаимоскрепленное, взаимно необходимое, непостижимым образом соединенное и не распадающееся на составные части неделимое целое — объект бытия.

Так растет из семени дерево, из оплодотворенной клетки — сложнейше устроенное живое существо; и так же, предположительно, из одного начального состояния, из одного Нечто возникла Вселенная: современная астрофизика, непрерывно совершенствуя модель расширяющейся Вселенной, утверждает, что вещество и энергия в наблюдаемом мире могли возникнуть буквально из ничего».

Обобщенный принцип Золотого сечения

А теперь рассмотрим основное тождество для золотой p-пропорции, задаваемое (1.44). Разделим все члены тождества (1.44) на τ_p^n. В результате получим тождество, задающее единицу:

$$1=\tau_p^0=\tau_p^{-1}+\tau_p^{p-1}. \qquad (1.53)$$

Используя (1.44), (1.53), можно сконструировать следующую «динамическую» модель разложения единицы по степеням золотой p-пропорции:

$$\begin{aligned}
&1=\tau_p^0=\tau_p^{1}+\tau_p^{(p+1)}\\
&\qquad\qquad \tau_p^{-(p+1)}=\tau_p^{-(p+1)-1}+\tau_p^{-2(p+1)}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \tau_p^{-2(p+1)}=\tau_p^{-2(p-1)-1}+\tau_p^{-3(p+1)} \qquad (1.54)\\
&1=\tau^0=\tau_p^{-1}+\tau_p^{-(p+1)-1}+\tau_p^{-2(p+1)-1}+\tau_p^{-3(p+1)-1}+\ldots=\sum_{i=1}^{\infty}\tau_p^{-(i-1)(p+1)-1}
\end{aligned}$$

Основным результатом проведенного исследования является получение более общего уравнения первоосновы:

$$1=\tau_p^{-1}+\tau_p^{-1(p+1)}=\sum_{i=1}^{\infty}\tau_p^{-(i-1)(p+1)-1}, \qquad (1.55)$$

которое задает более общий научный принцип — *обобщенный принцип Золотого сечения*. Ясно, что этот общий принцип содержит в себе в качестве частных случаев *принцип дихотомии* ($p=0$) и *принцип Золотого сечения* ($p=1$).

Если опять обратиться к книге Шевелева, то мы должны признать, что уравнение первоосновы, задаваемое (1.55), задает нам бесконечное число «гармонических» структур, которые могут быть созданы Природой (или Богом), используя комбинаторные соотношения.

Закон структурной гармонии систем

Что такое философия? Слово *philosophia* в переводе с греческого означает «любовь к мудрости». В наиболее общем виде она определяется как учение об общих принципах бытия и познания, об отношении человека и мира; это наука о всеобщих законах развития природы, общества и мышления. Философия зародилась на заре человеческой цивилизации в Индии, Китае, Египте, но своей

классической формы достигла в Древней Греции. Первые философы античного мира стремились главным образом открыть единый источник многообразных природных явлений. Таким источником, по мнению древних философов, была гармония. Эта идея наиболее четко выражена у Гераклита, считавшего, что в процессах развития систем «господствует закон гармонизации противоположных сторон, неравновеликих, неравнозначных, различающихся между собой вещей, но принадлежащих к единому кругу, подчиняющихся одному и тому же логосу».

Ясно, что повышение интереса к проблеме гармонии и Золотого сечения, что является одной из важнейших тенденций в развитии современной науки, не могло не привести к появлению оригинальных идей и открытий в современной философской науке. Одно из таких открытий было сделано белорусским философом Эдуардом Сороко, который выдвинул и развил в 80-е годы чрезвычайно интересную концепцию *структурной гармонии систем*. Эта концепция и вытекающий из нее *закон структурной гармонии систем*, основанный на понятии «обобщенных золотых сечений», по праву можно считать одним из крупных философских достижений XX века.

Главная идея Сороко состоит в том, чтобы рассмотреть реальные системы с «диалектической точки зрения». Как известно, всякий объект природы может быть представлен как диалектическое единство двух противоположных сторон A и B. Это диалектическая связь может быть выражена в следующем виде:

$$A+B=U\,(universum). \qquad (1.56)$$

Равенство (1.56) является наиболее общей формой выражения так называемого *закона сохранения*. Здесь A и B — различия внутри единства, логически непересекающиеся классы или состояния субстрата некоторого целого. Единственное условие: A и B должны измеряться одной и той же мерой, быть членами отношения, лежащего внутри единства. Примерами (1.56) могут быть вероятность и невероятность событий, масса и энергия, ядро атома и его оболочка, вещество и поле, анод и катод, животные и растения, духовное и материальное начала в системе ценностей, доход и расход и т. д.

Частный случай (1.56) — *закон сохранения информации*:

$$I+H=\log N, \qquad (1.57)$$

где I — количество информации и H — энтропия системы, имеющей N состояний.

Рассмотрим процесс самоорганизации системы, который сводится к переходу системы в состояние «гармонического равновесия». Очевидно, что существует некоторое соотношение, пропорция между сторонами A и B диалектического противоречия (1.57) в состоянии «гармонического равновесия». Это соотношение имеет строго регулярный характер и является причиной стабильности системы.

Исследуя равенства (1.56), (1.57), Сороко приходит к следующему важному заключению, которое он называет **законом структурной гармонии систем:**

> «Обобщенные золотые сечения суть инварианты, на основе и посредством которых в процессе самоорганизации естественные системы обретают гармоничное строение, стационарный режим существования, структурно-функциональную… устойчивость».

В чем же принципиальная особенность «закона Сороко»?

Начиная с Пифагора ученые связывали понятие гармонии с единственной золотой пропорцией $\tau = (1+\sqrt{5})/2 = 1{,}68$. «Закон Сороко» утверждает, что «гармоничное состояние» системы, соответствующее классической золотой пропорции, не является единственным, и что для одной и той же системы может существовать бесконечное количество «гармоничных» состояний, соответствующих числам τ_p из табл. 1.1.

Глава 2
Ряды Фибоначчи

2.1. Кто такой Фибоначчи?

Леонардо Пизано Фибоначчи

С понятием «средневековье» в нашем сознании ассоциируется разгул инквизиции, костры, на которых сжигали ведьм и еретиков, крестовые походы за «телом Господним». Наука в те времена явно не была в центре внимания общества. В этих условиях появление книги по математике *Liber abaci* («Книга об абаке»), написанной в 1202 году итальянским математиком Леонардо Пизано (по прозвищу Фибоначчи), явилось важным событием в «научной жизни» общества.

Кто же такой Фибоначчи и почему его математические сочинения так важны для истории математики? Чтобы ответить на эти вопросы, нам необходимо воспроизвести историческую эпоху, в которую жил и творил Фибоначчи.

Необходимо отметить, что период с XI по XII век был эпохой блестящего расцвета арабской культуры, но вместе с тем и началом ее упадка. К концу XI столетия, то есть к началу крестовых походов, арабы были, несомненно, наиболее просвещенным народом в мире, превосходя в этом отношении своих христианских врагов.

Еще до крестовых походов арабское влияние проникло на Запад. Однако наибольшее проникновение арабской культуры на

Леонардо Пизано Фибоначчи

Запад началось после Крестовых походов, которые ослабили арабский народ, но, с другой стороны, усилили арабское влияние на христианский Запад.

Не только хлопок и сахар Палестины, перец и черное дерево Египта, самоцветные камни и пряности Индии ищет и ценит Запад в арабском мире. Он начинает разбираться в том культурном наследии «великого античного Востока», хранителем которого стала арабская культура. Открывшийся мир не мог не ослепить своими красками и научными достижениями, и все шире становится в западном обществе спрос на арабские географические карты, учебники алгебры и астрономии.

Одной из интереснейших личностей эпохи крестовых походов, предвестницы эпохи Возрождения, был император Фридрих Гогенштауфен, ученик сицилийских арабов и поклонник арабской культуры. При его дворце в Пизе жил и работал величайший из европейских математиков средних веков Леонардо Пизано (по прозвищу Фибоначчи, что значит «сын Боначчи»).

О жизни Фибоначчи известно не много. Неизвестна даже точная дата его рождения. Предполагается, что Фибоначчи родился в восьмой декаде XII столетия (предположительно в 1170 году). Его отец был купцом и государственным чиновником, представителем нового класса бизнесменов, порожденных «коммерческой революцией». В то время Пиза была одним из крупнейших коммерческих центров, активно сотрудничавших с исламским Востоком, и отец Фибоначчи активно торговал в одной из факторий, основанных итальянцами на северном побережье Африки. Благодаря этому обстоятельству ему удалось пристроить своего сына, будущего математика Фибоначчи, в одно из арабских учебных заведений, где он смог получить неплохое для того времени математическое образование.

Один из известных историков математики — Морис Кантор назвал Фибоначчи «блестящим метеором, промелькнувшим на темном фоне западноевропейского Средневековья». Он высказывает предположение, что, возможно, Фибоначчи погиб во время

одного из Крестовых походов (предположительно в 1228 году), сопровождая императора Фридриха Гогенштауфена.

Фибоначчи написал несколько математических сочинений: *Liber abaci, Liber quadratorum, Practica geometriae*. Наиболее известным из них является *Liber abaci*. Это сочинение вышло при жизни Фибоначчи в двух изданиях — в 1202 году и в 1228 году. Книга состоит из 15 разделов, которые последовательно трактуют: о новых цифровых знаках индусов и о том, как с их помощью изображать числа (раздел 1); об умножении, сложении, вычитании и делении чисел (разделы 2–5); об умножении, сложении, вычитании и делении чисел с дробями (разделы 6–7); о нахождении цен товаров и об их обмене, правиле товарищества и о правиле «двойного ложного положения» (разделы 8–13); о нахождении квадратных и кубических корней (раздел 14); и, наконец, о правилах, относящихся к геометрии и о задачах алгебры (раздел 15).

Заметим, что Фибоначчи задумывал свое сочинение как пособие для купцов, однако по своему значению оно вышло далеко за пределы торговой практики и, по существу, представляло своеобразную математическую энциклопедию эпохи Средневековья. С этой точки зрения особенный интерес представляет 12-й раздел, в котором Фибоначчи сформулировал и решил ряд математических задач, представляющих интерес с точки зрения общих перспектив развития математики. Этот раздел занимает почти третью часть сочинения; по-видимому, ему Фибоначчи придавал наибольшее значение и проявил в нем наибольшую оригинальность.

Наиболее известной из сформулированных Фибоначчи задач является «задача о размножении кроликов», которая привела к открытию числовой последовательности 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., названной впоследствии *рядом Фибоначчи*.

Хотя Фибоначчи был одним из наиболее ярких математических умов в истории западноевропейской математики и внес огромный вклад в ее развитие, его вклад в математику незаслуженно занижен. Наиболее убедительно значение математического творчества Фибоначчи для математики отмечено русским математиком профессором А. В. Васильевым в его книге «Целое число» (1919):

> «Сочинения ученого пизанского купца были настолько выше уровня математических знаний даже ученых того времени, что их влияние на математическую литературу становится заметным только через два столетия после его смерти: в конце XV века, когда многие из его теорем и задач

9—2391

вводятся другом Леонардо да Винчи, профессором многих итальянских университетов Лукою Пачиоли в его сочинениях и в начале XVI века, когда группа талантливых итальянских математиков (Сципион дель Ферро, Иероним Кардано, Тарталия, Феррари) решением кубического и биквадратного уравнения положили начало высшей алгебре».

Из этого высказывания вытекает, что Фибоначчи почти на два столетия опередил западноевропейских математиков своего времени. Подобно Пифагору, который получил свое «научное образование» у египетских и вавилонских жрецов и затем способствовал передаче полученных знаний в греческую науку, Фибоначчи получил свое математическое образование в арабских учебных заведениях и многие из полученных там знаний, в частности, арабо-индусскую десятичную систему счисления, попытался «внедрить» в западноевропейскую науку. Историческая роль Фибоначчи для западного мира подобна роли Пифагора; она состояла в том, что он своими математическими книгами способствовал передаче математических знаний арабов в западноевропейскую науку и тем самым заложил основы для дальнейшего развития западноевропейской математики.

2.2. Числа Фибоначчи

Задача о кроликах

По иронии судьбы Фибоначчи, который внес выдающийся вклад в развитие математики, стал известным в современной математике только лишь как автор интересной числовой последовательности, называемой *числами Фибоначчи*. Эта числовая последовательность была получена Фибоначчи при решении знаменитой *задачи о размножении кроликов*. Формулировка и решение этой задачи считаются основным вкладом Фибоначчи в развитие комбинаторики. Именно с помощью этой задачи Фибоначчи предвосхитил *метод рекуррентных соотношений*, который считается одним из мощных методов решения комбинаторных задач. Рекуррентная формула, полученная Фибоначчи при решении этой задачи, считается первой в истории математики рекуррентной формулой.

Существо этой задачи состоит в следующем.

Пусть в огороженном месте имеется пара кроликов (самка и самец) в первый день января. Эта пара кроликов производит новую пару кроликов в первый день февраля и затем в первый день каждого следующего месяца. Каждая новорожденная пара кроликов становится зрелой уже через месяц и затем через месяц дает жизнь новой паре кроликов. Вопрос: сколько пар кроликов будет в огороженном месте через год, то есть через 12 месяцев с начала размножения?

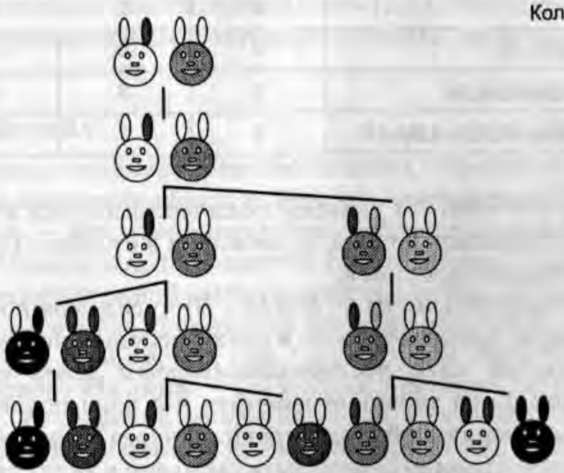


Рис. 2.1. Кролики Фибоначчи

Для решения этой задачи, которая наглядно демонстрируется с помощью рис. 2.1, обозначим через A пару зрелых кроликов, а через B — пару новорожденных кроликов. Тогда процесс размножения может быть описан с помощью двух «переходов», которые описывают ежемесячные превращения кроликов в процессе размножения:

$$A \Rightarrow AB;$$
$$B \Rightarrow A. \qquad (2.1\text{–}2.2)$$

Заметим, что переход (2.1) моделирует ежемесячное превращение каждой зрелой пары кроликов A в две пары, а именно в ту же самую пару зрелых кроликов A и новорожденную пару кроликов B. Переход (2.2) моделирует процесс «созревания» кроликов, когда новорожденная пара кроликов B через месяц превращается в зрелую пару A. Тогда, если мы начнем в первом месяце со зрелой пары A, процесс размножения кроликов может быть представлен с помощью табл. 2.1.

Таблица 2.1. Размножение кроликов

Дата	Пары кроликов	A	B	$A+B$
1 января	A	1	0	1
1 февраля	AB	1	1	2
1 марта	ABA	2	1	3
1 апреля	$ABAAB$	3	2	5
1 мая	$ABAABABA$	5	3	8
1 июня	$ABAABABAABAAB$	8	5	13

В столбцах A и B табл. 2.1 указаны количества зрелых и новорожденных пар кроликов в каждом месяце, а в столбце $A+B$ — суммарное количество кроликов.

Изучая последовательности A-, B- и $(A+B)$-чисел, можно установить следующую закономерность в этих числовых последовательностях: *каждый член последовательности равен сумме двух предыдущих*. Если теперь обозначить n-й член последовательности, удовлетворяющей этому правилу, через F_n, тогда указанное выше общее правило может быть записано в виде следующей математической формулы:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}. \tag{2.3}$$

Такая формула называется *рекуррентной формулой* (от лат. *recurere* — возвращаться).

Заметим, что конкретные значения числовой последовательности, порождаемой рекуррентной формулой (2.3), зависят от начальных значений последовательности F_1 и F_2. Например, мы имеем $F_1 = F_2 = 1$ для A-чисел, и для этого случая рекуррентная формула (2.3) «генерирует» следующую числовую последовательность:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \ldots \tag{2.4}$$

Для B-чисел мы имеем: $F_1 = 0$ и $F_2 = 1$; тогда соответствующая числовая последовательность для этого случая будет иметь вид:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots$$

Наконец, для $(A+B)$-последовательности мы имеем: $F_1 = 1$ и $F_2 = 2$.

Тогда соответствующая числовая последовательность для этого случая будет иметь вид:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots$$

В математике под числами Фибоначчи, как правило, понимается числовая последовательность (2.4). Числа Фибоначчи обладают удивительными математическими свойствами, но об этом ниже.

О кроликах

Думается, что самое время поговорить о кроликах. Почему именно это животное вошло в историю математики? Как известно, кролик — это млекопитающее отряда грызунов семейства зайцев. Первоначальной родиной дикого кролика в основном считались страны южной части Западной Европы (Испания, Франция, Италия), откуда кролик был привезен человеком во все страны к северу от Альпийских гор. Современная область распространения дикого кролика — вся южная и средняя части Западной Европы, но особенно многочислен он в странах, прилегающих к Средиземному морю, а также в Африке, Азии, Австралии, Новой Зеландии, Америке.

Особенностью кроликов является их удивительная плодовитость. Крольчиха в 3–4 месяца от роду достигает половой зрелости, причем она способна размножаться круглый год. Беременность оплодотворенных крольчих длится от 28 до 32 суток (то есть в среднем 30 суток). Это означает, что, рассматривая процесс размножения кроликов, Фибоначчи исходил из реальных фактов (беременность крольчихи в среднем длится 1 месяц). Но число крольчат, которые могут быть получены от одной крольчихи в результате одного окрола, составляет 8–10 (а иногда и больше), то есть на самом деле кролики размножаются еще более интенсивно, чем предположил Фибоначчи в своей задаче.

Именно этой исключительной плодовитостью кроликов объясняется тот факт, что во многих странах нашествие кроликов рассматривается как национальная трагедия. Примером является Австралия. Началось все с того, что в 1837 году один австралийский фермер создал кролеферму из 24 кроликов, которые, расплодившись и вырвавшись на свободу, уничтожили чуть ли не всю зелень континента. И только благодаря решительным мерам австралийского правительства в борьбе с «длинноухой саранчой» удалось сократить численность прожорливой твари. В Австралии кроликам объявлена настоящая война, которая длится более 150 лет. Через весь материк на многие сотни километров австралийцы построили «великую китайскую стену» — барьер, непреодолимый для кроликов. За каждого убитого кролика выплачивается вознаграждение, против кроликов применяются химические и биологические средства. Война продолжается с переменным успехом. Австралийские дикие кролики научились лазить по деревьям, стали ужасно агрессивными, устраивают уничтожающие набеги на поля и огороды фермеров.

Кроме того, плодовитое кроличье племя, некогда своеобразно повлиявшее на выдающегося математика Италии, в настоящее время взяло в осадное положение итальянский остров Устина (севернее Сицилии). На 1000 жителей этого крохотного островка приходится 100 000 кроликов. В отличие от жителей Австралии коренное население Устины сдается без боя: уже пятая часть жителей эмигрировала с острова.

Но не следует забывать и о другой стороне «кроличьей проблемы»: кроличье мясо считается одним из наиболее вкусных и полезных. И одним из крупнейших производителей кроличьего мяса является Италия, родина Фибоначчи. В этой связи историкам математики необходимо много поработать, чтобы установить, что же послужило для Фибоначчи первопричиной формулировки «задачи о размножении кроликов»: пристрастие к крольчатине или любовь к высшей математике.

Коровы Даденея

Английский ученый Генри Даденей (1857–1930), который был большим любителем головоломок, написал несколько превосходных книг в этой области. В одной из них он поменял *кроликов Фибоначчи* на коров, сформулировав *задачу о коровах*, которая более приближена к реальности. Он заменил месяцы на годы и кроликов на быков и коров. В его изложении *задача о коровах* выглядит следующим образом:

> Если корова производит своего первого теленка (женского пола) в возрасте двух лет и затем ежегодно производит следующего теленка (женского пола), то сколько телят (женского пола) будет через 12 лет, если предположить, что ни один теленок не умирает?

Таким образом, формулируя свою задачу, Фибоначчи использовал прием, который широко используется в математике: он упростил *задачу размножения*, сведя ее к *размножению кроликов*. В результате такого упрощения он получил *ряд Фибоначчи*, который имеет много других интересных практических приложений, о которых мы расскажем позже.

Медоносные пчелы и генеалогические деревья

Существует более 30 000 разновидностей пчел. Наиболее известные из них — это медоносные пчелы, которые обычно живут в колонии, названной ульем. Эти пчелы имеют необычное *генеалогическое дерево*. Начнем с некоторых необычных фактов, касающихся пчел. Прежде всего, не все из них имеют двух родителей. В колонии пчел существует особая пчела, называемая *маткой*. Существует много *рабочих пчел* женского пола, но, в отличие от матки, они не производят яиц. В пчелиной семье существуют также *трутни*, которые являются пчелами мужского пола. Трутни выводятся из неоплодотворенных яиц матки, то есть имеют только мать, но не имеют отца! Все пчелы женского пола производятся маткой, оплодотворенной трутнем, то есть они имеют двух родителей (рис. 2.2).

Особи женского пола обычно превращаются в *рабочих пчел*, но некоторые из них питаются специальным веществом, названным *королевским желе*, которое заставляет их превратиться в маток, готовых уйти, чтобы начать новую колонию, когда пчелы формируют рой и оставляют улей в поисках места, чтобы строить новое гнездо.

Таким образом, особи женского пола (матки и рабочие пчелы) имеют двух родителей, матку и трутня, тогда как особи мужского пола (трутни) имеют только одного родителя, матку.

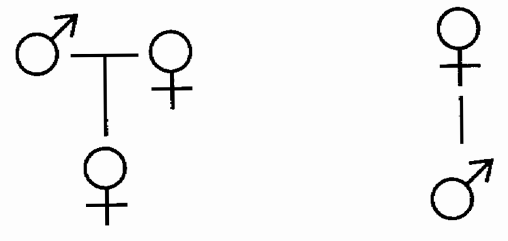


Рис. 2.2. Пчелы женского пола (матки и рабочие пчелы) имеют двух родителей, пчелы мужского пола (трутни) имеют только одного родителя (матку)

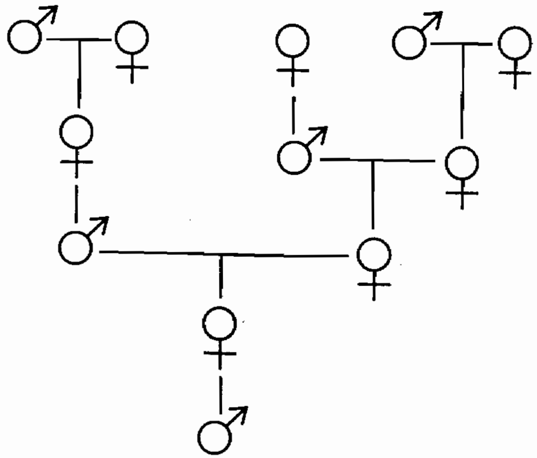


Рис. 2.3. Генеалогическое дерево медоносных пчел

Для построения *генеалогических деревьев* (рис. 2.3) мы будем использовать следующее правило: *родители в генеалогическом дереве стоят выше своих детей*, которые представляют собой последнее поколение. Чем выше мы поднимаемся по генеалогическому дереву, тем старше особи. Такие деревья показывают всех предков конкретной особи внизу диаграммы. Мы получили бы весьма разветвленное генеалогическое дерево, если бы перечисляли всех потомков человека, как мы сделали это в *задаче о кроликах*, где показали всех потомков начальной пары кроликов (рис. 2.1).

Рассмотрим теперь генеалогическое дерево *трутня*. Как упоминалось, он имеет одного родителя, матку. Однако трутень имеет двух прародителей — «дедушку» и «бабушку», поскольку его мама (матка) имеет двух родителей (женского и мужского пола). Трутень имеет трех прапрародителей, поскольку его «бабушка» (женского пола) имела двух родителей, но его «дедушка» имел только одного родителя (матку). Однако каждая пчела женского пола появляется из оплодотворенного трутнем яйца и, следовательно, имеет двух родителей (матку и трутня). Ясно, что она имеет только трех прародителей («дедушек» и «бабушек»), поскольку трутень имеет только одного родителя (матку). Возникает вопрос, что собой представляет генеалогическое дерево для пчел? Можно составить следующую таблицу, которая задает генеалогическое дерево каждого трутня и каждой пчелы женского пола.

Таблица 2.2. Генеалогия пчел и трутней

	Число пчел мужского пола	Число пчел женского пола
Число родителей	1	2
Число прародителей	2	3
Число прапрародителей	3	5
Число прапрапрародителей	5	8
Число прапрапрапрародителей	8	13

Как следует из табл. 2.2, размножение пчел осуществляется по «принципу Фибоначчи»!

2.3. Вариации на тему Фибоначчи

Вариации на заданную тему — жанр хорошо известный в музыке. Большими любителями этого жанра были Моцарт, Бетховен и другие композиторы. Отличительная особенность произведений вариационного жанра заключается в том, что они в большинстве случаев начинаются с одной несложной основной темы, претерпевающей в дальнейшем значительные изменения по темпу, настроению и характеру. Но сколь бы причудливыми ни были вариации, у слушателей непременно должно создаваться впечатление, будто каждая из них является естественным развитием основной темы.

Последуем примеру музыкальной композиции такого рода и, выбрав простую математическую тему (последовательность чисел Фибоначчи), рассмотрим ее вместе с многочисленными вариациями.

Суммы последовательных чисел Фибоначчи

Вычислим сумму из n подряд идущих чисел Фибоначчи. Начнем с простейших сумм:

$$\begin{aligned} 1+1 &= \mathbf{3}-1; \\ 1+1+2 &= \mathbf{5}-1; \\ 1+1+2+3 &= \mathbf{8}-1; \\ 1+1+2+3+5 &= \mathbf{13}-1. \end{aligned} \tag{2.5}$$

10—2391

Если рассмотреть в этих выражениях числа, выделенные жирным шрифтом (3, 5, 8, 13), то легко установить, что они представляют последовательность ряда Фибоначчи! Из этого наблюдения мы можем написать общую формулу для суммы из n подряд идущих чисел Фибоначчи:

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_n = F_{n+2} - 1. \tag{2.6}$$

А теперь рассмотрим сумму из n подряд идущих чисел Фибоначчи с нечетными индексами 1, 3, 5, ..., $2n-1$, ... Для этого начнем с простейших сумм такого рода:

$$\begin{aligned} &1+2=\mathbf{3};\\ &1+2+5=\mathbf{8};\\ &1+2+5+13=\mathbf{21};\\ &1+2+5+13+34=\mathbf{55}. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Анализ (2.7) позволяет установить еще одну закономерность: сумма из n подряд идущих чисел Фибоначчи с нечетными индексами всегда равна некоторому числу Фибоначчи! В общем виде частные суммы (2.7) могут быть объединены следующим математическим выражением:

$$F_1 + F_3 + F_5 + \ldots + F_{2n-1} = F_{2n}. \tag{2.8}$$

Несложно доказать подобные формулы для сумм чисел Фибоначчи с четными индексами:

$$F_2 + F_4 + F_6 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1. \tag{2.9}$$

Суммы квадратов чисел Фибоначчи и Люка

Установим теперь, чему равна сумма квадратов последовательных чисел Фибоначчи, то есть чему равно следующее выражение:

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2. \tag{2.10}$$

Как всегда, начнем с анализа простейших сумм типа (2.21):

$$\begin{aligned} &1^2+1^2=\mathbf{1\times 2};\\ &1^2+1^2+2^2=6=\mathbf{2\times 3};\\ &1^2+1^2+2^2+3^2=15=\mathbf{3\times 5};\\ &1^2+1^2+2^2+3^2+5^2=40=\mathbf{5\times 8}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Анализ (2.11) приводит нас к следующей общей формуле:

$$F_1^2 + F_2^2 + \ldots + F_n^2 = F_n F_{n+1}, \tag{2.12}$$

то есть сумма квадратов последовательных чисел Фибоначчи равна произведению наибольшего числа Фибоначчи в этой сумме на следующее после него число Фибоначчи!

А теперь выясним, чему равна сумма квадратов двух соседних чисел Фибоначчи, то есть

$$F_n^2 + F_{n+1}^2. \tag{2.13}$$

Начнем с анализа простейших сумм типа (2.13):

$$\begin{aligned} &1^2+1^2=1+1=\mathbf{2};\\ &1^2+2^2=1+4=\mathbf{5};\\ &2^2+3^2=4+9=\mathbf{13};\\ &3^2+5^2=9+25=\mathbf{34}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Анализ (2.14) позволяет нам установить еще одну замечательную закономерность: сумма квадратов двух соседних чисел Фибоначчи всегда равна числу Фибоначчи! В математической форме эта закономерность выглядит следующим образом:

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1}. \tag{2.15}$$

Осмысливая формулы (2.6, 2.8, 2.9, 2.10, 2.15) и восхищаясь ими, можно понять восторг многих выдающихся математиков XX столетия, в частности русского математика Николая Воробьева, автора замечательной брошюры «Числа Фибоначчи», которая по праву считается математическим бестселлером XX века, и американского математика Вернера Хоггатта, создателя американской Ассоциации Фибоначчи и учредителя математического журнала *The Fibonacci Quarterly*. Именно в этих формулах они увидели некоторую «математическую тайну Природы», и это вдохновило их посвятить весь свой математический талант исследованию этого уникального математического феномена!

Связь с золотой пропорцией

Рассмотрим числовую последовательность, образованную из отношений соседних чисел Фибоначчи, то есть

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \ldots \tag{2.16}$$

Первые числа последовательности (2.16) имеют следующие значения:

$$\frac{1}{1}=1,\ \frac{2}{1}=2,\ \frac{3}{2}=1{,}5,\ \frac{5}{3}=1{,}66,\ \ldots,$$
$$\frac{8}{5}=1{,}6,\ \frac{13}{18}=1{,}625,\ \frac{21}{13}=1{,}61538,\ \ldots$$

К чему же стремится последовательность (2.25), то есть отношение двух соседних чисел Фибоначчи

$$\frac{F_n}{F_{n-1}},$$

если индекс n устремить в бесконечность? Для ответа на этот вопрос рассмотрим еще раз представление золотой пропорции в виде непрерывной дроби (1.7). Нетрудно показать, что последовательность (2.16) непосредственно связана с представлением (1.7). Действительно, дроби (2.16) являются последовательными приближениями непрерывной дроби (1.7), а именно:

$$\frac{1}{1}=1 \text{ (первое приближение);}$$
$$\frac{2}{1}=1+\frac{1}{1} \text{ (второе приближение);}$$
$$\frac{3}{2}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}} \text{ (третье приближение);}$$
$$\frac{5}{3}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}} \text{ (четвертое приближение).}$$

Устремляя этот процесс в бесконечность, мы получим:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n-1}}=\tau=\frac{1+\sqrt{5}}{2}. \qquad (2.17)$$

Результат, задаваемый выражением (2.17), является для нас в некотором смысле ключевым, так как он подчеркивает глубокую связь чисел Фибоначчи с золотой пропорцией. Это означает, что числа Фибоначчи, так же как и золотая пропорция, выражают гармонию! Считается, что первым, кто установил связь чисел Фибоначчи с золотой пропорцией, был Иоганн Кеплер — гениальный математик и астроном.

«Железная таблица» Штейнхауза

Известный польский математик Гуго Штейнхауз, который считается признанным в мире специалистом в области теории вероятностей, построил таблицу случайных чисел, используя золотую пропорцию. Для этой цели он умножил 10 000 целых чисел от 1 до 10 000 на число $w=\tau-1=0{,}61803398\ldots$, где τ — золотая пропорция. Как результат умножения он получил последовательность чисел, умноженных на w, то есть:

$$1w,\ 2w,\ 3w,\ \ldots,\ 4181w,\ \ldots,\ 6765w,\ \ldots,\ 10\,000w.$$

Штейнхауз назвал эту числовую последовательность «золотыми числами». Каждое «золотое число» содержит целую и дробную части.

Например, число $1000w = 618{,}03398$ имеет целую часть 618 и дробную часть 0,03398; число $4181w = 2584{,}0001$. Более того, он установил, что не существует «золотых чисел» с дробной частью, равной 0, а также не существует двух «золотых чисел» с равными дробными частями. Таким образом, каждое «золотое число» имеет единственную дробную часть.

Если теперь упорядочить все «золотые числа» в соответствии с их дробными частями, то мы увидим, что наименьшую дробную часть будет иметь число 4181 и наибольшую — число 6765. Если теперь расположить 10 000 натуральных чисел в порядке возрастания их дробных частей, то мы получим следующую таблицу натуральных чисел:

4181	8362	1597	5778	9959
3194	7365	0610	4791	8972
......				
8739	1974	6155	3571	7752
0987	5168	9349	2584	6765.

Штейнхауз назвал полученную таблицу *«железной таблицей»*, учитывая ряд ее уникальных свойств. «Железная таблица» демонстрирует глубокую связь с числами Фибоначчи. Первое свойство состоит в том, что разность между соседними числами «железной таблицы» всегда равна одному из чисел: **4181, 6765** и **2584**. Действительно, мы имеем:

8362 – 4181 = 4181, 8362 – 1597 = 6765, 5778 – 1597 = 4181, ...
9349 – 5168 = 4181, 9349 – 2584 = 6765, 6765 – 2584 = 4181.

Очень просто определить числа 2584, 4181 и 6765, если рассмотреть ряд Фибоначчи:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 897, 1597, 2584, 4181, 6765, ...

Таким образом, характерные числа «таблицы Штейнхауза» 2584, 4181, 6765 есть не что иное, как соседние числа Фибоначчи, а именно: $F_{18} = 2584$, $F_{19} = 4181$, $F_{20} = 6765$.

Мы можем видеть из «железной таблицы», что она начинается с числа Фибоначчи $F_{18} = 2584$ и заканчивается двумя соседними числами Фибоначчи $F_{19} = 4181$ и $F_{20} = 6765$.

Ясно, что «железная таблица» может быть построена для произвольного количества N натуральных чисел. Ян Гржеджельский в своей книге «Энергетически-геометрический код природы» (1986) проанализировал «железные таблицы» для случаев $N = F_n$, где F_n — число Фибоначчи. При этом он открыл интересную закономерность, которая возникает при переходе от «железной таблицы» с $N = F_{n-1}$ к следующей «железной таблице» с $N = F_n$. При этом «железная таблица», соответствующая $N = F_n$, как бы «раздвигается» в сравнении с предыдущей «железной таблицей», соответствующей $N = F_{n-1}$, создавая строго определенные позиции в новой «железной таблице» для чисел $F_{n-1} + 1$, $F_{n-1} + 2$, ..., F_{n-1}, F_n. По мнению Гржеджельского, метод конструирования «железной таблицы» «напоминает функционирование всех спектров излучения в природе».

2.4. Числа Люка

Франсуа Эдуард Анатоль Люка

Фибоначчи не стал изучать математические свойства полученной им числовой последовательности (2.4). Это за него сделали другие математики. Начиная с XIX века математические работы, посвященные свойствам чисел Фибоначчи, по остроумному выражению одного математика, «начали размножаться как кролики Фибоначчи». Лидером этих исследований в XIX веке стал французский математик *Люка*. Кто же такой Люка?

Франсуа Эдуард
Анатоль Люка
(1842–1891)

Люка Франсуа Эдуард Анатоль родился в 1842 году и умер в 1891 году в результате несчастного случая на банкете, когда осколки разбитой тарелки поранили его щеку, что вызвало заражение крови.

Важнейшие математические работы Люка относятся к теории чисел и неопределенному анализу. В 1878 году Люка дал критерий для определения того, простым или составным является число Мерсенна $M_p = 2^p - 1$. Применяя свой метод, Люка установил, что число Мерсенна

$$M_{127} = 2^{127} - 1 = 170141183460469231731687303715884105727$$

является простым числом. В течение 75 лет это число оставалось наибольшим простым числом, известным науке. Он нашел 12-е совершенное число и составил ряд интересных задач.

Дадим некоторые пояснения к этим научным результатам Люка. Хорошо известно, что простыми называются такие числа, которые не имеют других делителей, кроме самого себя и единицы: 2, 3, 5, 7, 11, 13, ... Уже пифагорейцам было известно, что простых чисел бесконечно много (доказательство этого утверждения содержится в «Началах» Евклида). Изучение простых чисел и выяснение их распределения в натуральном ряду чисел является весьма трудной задачей теории чисел. Поэтому научный результат, полученный Люка в области простых чисел, несомненно, принадлежал к разряду выдающихся математических достижений.

Любопытно, что Люка увлекался так называемыми *совершенными числами*. Что это такое? Как известно, пифагорейская теория чисел носила качественный характер, то есть пифагорейцы интересовались качественной стороной чисел. Числам они приписывали некоторые необычные свойства. В этом отношении интерес представляют так называемые *совершенные числа*. В качестве примера такого числа можно привести число 6. Его особенность состоит в том, что это число в точности равно сумме своих делителей, то есть $6 = 1 + 2 + 3$, где числа 1, 2, 3 являются делителями числа 6. Кроме числа 6 пифагорейцы знали еще два таких числа — 28 и 496:

$$28 = 1+2+4+7+14;\ 496 = 1+2+4+8+16+31+62+124+248.$$

В «Арифметике» Никомаха из Геразы (I век н. э.) приведено еще одно «совершенное» число: 8128. Никомах писал:

«Совершенные числа красивы. Однако красивые веши редки и малочисленны. Большинство чисел являются избыточными или недостаточными, в то время как совершенных чисел немного. Среди единиц их всего одно, так же среди десятков, сотен и тысяч».

Доказано, что по мере продвижения от начала в натуральном ряду совершенные числа встречаются все реже. В первых 10 000 числах натурального ряда имеется всего четыре совершенных числа.

Поиск совершенных чисел оказался увлекательным занятием для математиков. Пятое совершенное число $2^{12} \times (2^{13} - 1)$ было найдено в XV веке немецким математиком Региомонтаном. В XVI веке немецкий ученый Шейбель нашел еще два совершенных числа: 8 589 869 056 и 137 438 691 328. В 1644 году французский математик М. Мерсенн нашел восьмое совершенное число. Люка в XIX веке нашел 12-е совершенное число.

Исследования в этой области продолжаются до сих пор, причем сюда подключается вся мощь современных компьютеров. Например, 18-е совершенное число $2^{3216} \times (2^{3217} - 1)$, найденное с помощью компьютерного моделирования, имеет 2000 десятичных цифр.

К чести Люка, надо отметить одно его научное предсказание. Люка уже в XIX столетии, то есть задолго до возникновения современных компьютеров, обратил внимание на технические преимущества двоичной системы счисления при технической реализации вычислительных устройств и машин. Таким образом, он почти на столетие предвосхитил Джона фон Неймана, выдающегося американского физика и математика, который отдал решительное предпочтение двоичной системе счисления при технической реализации электронных компьютеров («Принципы Джона фон Неймана»).

Числа Люка

Заслуга Люка перед теорией чисел Фибоначчи состоит в том, что он впервые ввел само название *числа Фибоначчи* и, кроме того, ввел в рассмотрение так называемые *обобщенные числа Фибоначчи*, описываемые следующей рекуррентной формулой:

$$G_n = G_{n-1} + G_{n-2}. \tag{2.18}$$

В зависимости от начальных членов G_1, G_2 рекуррентная формула (2.18) порождает бесконечное количество числовых последовательностей, подобных классическим числам Фибоначчи (2.4).

Из всех возможных последовательностей, порождаемых (2.18), наибольшее применение получили две числовые последовательности — числа Фибоначчи (2.4) и так называемые *числа Люка* L_n, которые задаются рекуррентным соотношением

$$L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \tag{2.19}$$

при следующих начальных значениях:

$$L_1 = 1 \text{ и } L_2 = 3. \tag{2.20}$$

Тогда, используя рекуррентную формулу (2.19) и начальные условия (2.20), мы можем вычислить числовую последовательность, называемую «числами Люка»:

$$1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, \ldots \tag{2.21}$$

Можно вывести много замечательных свойств чисел Люка, подобных выведенным выше свойствам чисел Фибоначчи. Приведем только некоторые из них:

$$\begin{aligned}
&L_1 + L_2 + \ldots + L_n = L_{n+2} - 3;\\
&L_1 + L_3 + L_5 + \ldots + L_{2n-1} = L_{2n} - 2;\\
&L_2 + L_4 + L_6 + \ldots + L_{2n} = L_{2n+1} - 1;\\
&L_1^2 + L_2^2 + \ldots + L_n^2 = L_n L_{n+1} - 2;\\
&L_n^2 + L_{n+1}^2 = 5F_{2n+1};\\
&\lim_{n\to\infty} \frac{L_n}{L_{n-1}} = \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.
\end{aligned} \tag{2.22–2.27}$$

Расширенные числа Фибоначчи и Люка

До сих пор мы рассматривали числа Фибоначчи F_n и числа Люка L_n, подразумевая, что их индексы n являются натуральными числами, то есть $n = 1, 2, 3, ...$ Оказывается, что они могут быть расширены в сторону отрицательных значений индексов n, то есть когда индексы n принимают значения из множества: $n = 0, -1, -2, -3, ...$

Расширенные таким образом числа Фибоначчи и Люка представлены в табл. 2.3.

Таблица 2.3. Расширенные числа Фибоначчи и Люка

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55
F_{-n}	0	1	–1	2	–3	5	–8	13	–21	34	–55
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76	123
L_{-n}	2	–1	3	–4	7	–11	18	–29	47	–76	123

Как вытекает из табл. 2.3, члены последовательностей F_n и L_n обладают рядом чудесных математических свойств. Например, для нечетных $n = 2k + 1$ члены последовательностей F_n и F_{-n} совпадают, то есть $F_{2k+1} = F_{-2k-1}$, а для четных $n = 2k$ они противоположны по знаку, то есть: $F_{2k} = -F_{-2k}$. Что касается чисел Люка Ln, то здесь все наоборот: $L_{2k} = L_{-2k}$, $L_{2k+1} = -L_{-2k-1}$.

А теперь сравним числовые последовательности Фибоначчи и Люка, задаваемые табл. 2.3. Рассмотрим, например, число Люка $L_4 = 7$ и сравним его с последовательностью чисел Фибоначчи F_n. Нетрудно установить, что $L_4 = 7 = 2 + 5$. Но 2 и 5 являются числами Фибоначчи $F_3 = 2$ и $F_5 = 5$.

Но, может быть, наше наблюдение является случайным совпадением? Продолжая исследование табл. 2.3, мы получим, что $1 = 0 + 1$, $3 = 1 + 2$, $4 = 1 + 3$, $7 = 2 + 5$, $11 = 3 + 8$, $18 = 5 + 13$, $29 = 8 + 21$ и т. д.

Сравним теперь числовые последовательности L_{-n} и F_{-n}. Здесь находим то же самое, то есть: $-1 = 0 + (-1)$, $3 = 1 + 2$, $-4 = (-1) + (-3)$ и т. д. Мы установили следующее удивительно простое математическое правило, связывающее числа Люка и Фибоначчи:

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}, \qquad (2.28)$$

где индекс n принимает следующие значения: $0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$

Продолжая исследования табл. 2.3, можно также установить, что числа Люка и Фибоначчи связаны и другими весьма интересными соотношениями, например:

$$L_n = F_n + 2F_{n-1};$$
$$L_n + F_n = 2F_{n+1}. \qquad (2.29–2.30)$$

К чести Люка, следует отметить, что именно его исследования в области чисел Фибоначчи и чисел Люка стали стартовой площадкой для группы американских энтузиастов, которые в 1963 году объединились в Ассоциацию Фибоначчи. С этого же года Ассоциация Фибоначчи начала издавать математический журнал *The Fibonacci Quarterly*, а с 1984 года проводить регулярно (один раз в два года) Международную конференцию «Числа Фибоначчи и их приложения». Деятельность Ассоциации Фибоначчи сыграла огромную роль в развитии этого научного направления и стимулировала исследования в других странах.

В 1992 и 1993 годах в Киеве, а затем в Ставрополе (1994–1995 годы) были проведены международные семинары «Золотое сечение и проблемы гармонии систем», которые объединили энтузиастов чисел Фибоначчи и Золотого сечения в славянских странах (Россия, Украина, Белоруссия). В результате образовался творческий союз представителей науки и искусства различных направлений, известный под названием «Славянская “золотая” группа». В 2003 году в Виннице по инициативе ряда активных членов этой группы была проведена Международная конференция «Проблемы гармонии, симметрии и Золотого сечения в природе, науке и искусстве», на которой был организован Международный клуб Золотого сечения.

2.5. Формула Кассини

Великий астроном Джовани Доменико Кассини

Кассини — это знаменитая династия французских астрономов. Наиболее знаменитым из них считается основатель этой династии *Джовани Доменико Кассини* (1625–1712). Признанием его выдающихся заслуг в области астрономии являются следующие факты. Именем Джовани Кассини названы многие астрономические объекты: кратер Кассини на Луне, кратер Кассини на Марсе, щель Кассини — промежуток в кольцах Сатурна, законы Кассини — три открытых Кассини закона движения Луны. Именами Кассини — Гюйгенса назван космический аппарат, созданный совместно НАСА, Европейским космическим агентством и Итальянским космическим агентством, целью которого является изучение планеты Сатурн и ее колец и спутников. Аппарат состоял из двух основных компонент: непосредственно самой станции «Кассини Орбитер» и спускаемого зонда «Гюйгенс», который был отделен от станции и спустился на поверхность спутника Сатурна Титан. «Кассини-Гюйгенс» был запущен 15 октября 1997-го и достиг системы Сатурна 1 июля 2004-го. Это первый искусственный спутник Сатурна.

Но оказывается имя Кассини широко известно не только в астрономии, но и в математике. Кассини принадлежит честь разработки теории замечательных геометрических фигур, известных под названием *овалы Кассини*, а выведенная им *формула Кассини* является едва ли не самым важным математическим тождеством, связывающем числа Фибоначчи.

Джованни Кассини родился 8 июня 1625 года в небольшом итальянском городке Перинальдо (Генуэзская республика). Образование получил в иезуитском коллегиуме в Генуе и в аббатстве Сан-Фруктуозо. В 1644–1650 годы работал в обсерватории маркиза Мальвазиа в Пандзано (близ Болоньи), затем продолжил астрономическое образование под руководством Дж. Б. Риччоли и Ф. М. Гримальди.

В юности Кассини сильно увлекся астрологией, что дало импульс и к занятиям астрономией. Вскоре он приобрел известность как один из больших знатоков астрологии. Именно благодаря заслуженной репутации астролога началась его научная карьера.

Джованни Доменико Кассини (1625–1712)

Маркиз Корнелио Мальвазия, богатый астроном-любитель и сенатор Болоньи, который составлял астрологические таблицы, пригласил Кассини на работу в свою обсерваторию в Пандзано близ Болоньи. Работая в этой обсерватории, Кассини сконструировал свои первые астрономические инструменты, провел первые научные наблюдения. Постепенно занятие астрономией вышло на первый план и стало доминирующим до конца его жизни. При этом отношение Кассини к астрологии становилось все более критическим (большую роль здесь сыграло знакомство с трактатом Пико делла Мирандолы «Против предсказательной астрологии»), и в период после отъезда Кассини во Францию в феврале 1669 года мы уже не находим никаких свидетельств занятий астрологией. Приоритеты Кассини окончательно утвердились в области научной астрономии и геодезии.

В 1650 году Кассини получил место профессора математики и астрономии в Болонском университете, которое занимал до 1669 года. Основные научные работы Кассини относятся к наблюдательной астрономии, и прославился он в первую очередь как талантливый наблюдатель. Работая в Болонье, он первым в истории выполнил многочисленные позиционные наблюдения Солнца с меридианным инструментом и на основании этих наблюдений составил новые солнечные таблицы, опубликованные в 1662 году. Благодаря исследованиям Кассини был намечен Парижский меридиан и стало возможным появление знаменитой карты Франции, названной *картой Кассини*. В 1664 году ученый начал наблюдать поверхности планет с помощью больших телескопов с высококачественной оптикой.

Следя за перемещением теней от спутников Юпитера по диску планеты и зарисовывая вид облачной поверхности планеты, Кассини впервые определил период вращения Юпитера; полученное им значение (9 часов 56 минут) практически не отличается от современного (9 часов 55 минут 30 секунд). Он также описал систему полос на его поверхности и измерил «сплюснутость» планеты. В 1666 году Кассини наблюдал детали на поверхности Марса и по ним весьма точно определил период его осевого вращения — 24 часов 40 минут (современное значение — 24 часа 37 минут 23 секунды).

В 1668 году Кассини разработал теорию и составил таблицы движения спутников Юпитера. В ту эпоху это было чрезвычайно ценное пособие для мореплавателей, позволявшее им по наблюдаемому положению спутников определять время на меридиане обсерватории, а отсюда — географическую долготу своего корабля (других методов тогда не было, поскольку механические часы были несовершенны).

Слава Кассини как астронома была так велика, что в 1669 году он был избран членом Парижской академии наук. Король Людовик XIV в том же году по рекомендации Ж. Пикара приглашает Кассини занять пост директора Парижской обсерватории, в то время еще строившейся и законченной в основном к 1671 году. С этого переезда Франция стала его второй родиной до конца жизни. В Париже Кассини всецело отдался одной астрономии. В 1671-м, уже работая в Париже, он открыл второй спутник Сатурна — Япет, и объяснил изменения его яркости тем, что этот спутник всегда обращен к планете одной стороной. В 1672-м открыл третий спутник Сатурна — Рею, в 1684-м — два других, Тетис и Диону. В 1675 году обнаружил, что кольцо Сатурна состоит из двух частей, разделенных темной полосой (которую стали называть *щелью Кассини*). Размышляя над физической природой кольца Сатурна, Кассини предположил, что оно состоит из большого количества отдельных небольших частиц; в наше время эта гипотеза подтвердилась.

На протяжении 1671–1679 годов ученый наблюдал детали лунной поверхности и в 1679 году составил большую карту Луны. В 1693-м Кассини сформулировал три эмпирических правила, описывающих движение Луны (*законы Кассини*):

1. Луна вращается вокруг своей оси с постоянной скоростью, равной одному обороту за орбитальный период.
2. Плоскость лунного экватора наклонена на постоянный угол (около 1,5°) к эклиптике (плоскости земной орбиты).
3. Восходящий узел лунной орбиты (то есть точка, где орбита Луны пересекает эклиптику с юга на север) всегда совпадает с нисходящим узлом лунного экватора (то есть точкой, в которой экватор Луны пересекает, под углом около 5,1°, эклиптику с севера на юг). Таким образом, ось вращения Луны, ось лунной орбиты и ось эклиптики всегда лежат в одной плоскости.

Законы Кассини позволили точно вычислить величину лунных либраций («покачиваний») по долготе и широте, дающих возможность земному наблюдателю заглядывать на обратную сторону Луны.

В свое время Джованни Кассини написал историческую фразу, которую можно положить в основу всех его открытий.

«Я полагаюсь исключительно на собственную интуицию, никакие расчеты не оправдывают себя, если за точностью не стоят эмоции».

Умер Кассини в Париже 14 сентября 1712 года в возрасте 87 лет совершенно слепым и очень уважаемым человеком.

Овалы Кассини

Древние греки превозносили сферу, считая ее законченной самодостаточной идеальной формой, лежащей в основании мироздания («культ сферы»). Именно это представление о движении планет вокруг Солнца лежало в основе «астрономии Птолемея». Однако в XVII веке эта многовековая «птолемеевская идиллия» была разрушена новыми астрономическими законами, установленными Иоганном Кеплером. Важнейшим из них считается *Первый закон Кеплера*, согласно которому движение планет соответствует не идеальной окружности, а другой геометрической фигуре — *эллипсу*. Сам Кеплер был в шоке от такого «варварства». До сих пор мы говорим по привычке «в высших сферах» или «сфера деятельности», отдавая дань красивым античным представлениям о мире.

На веб-сайте Е. С. Скляревского «Арбуз» представлена интересная статья «Космические овалы Кассини», информацию из которой мы используем ниже.

Начнем с определения эллипса. Как известно, эллипс — это плоская фигура, у которой для каждой точки сумма расстояний от двух фиксированных точек (полюсов) постоянна. В зависимости от соотношения расстояний между фокусами и от суммы расстояний (или от соотношения полуосей) можно получить разные фигуры — от круга до линии.

Исследование эллипса, у которого сумма расстояний каждой точки от двух фокусов постоянна, наталкивает на мысль: а что, если постоянным будет не сумма расстояний от двух точек, а их произведение?

Первым, кто задумался над такой идеей, был Джованни Кассини. В 1680 году он начал изучать кривую, названную *овалом Кассини*, которая является геометрическим местом точек, чье произведение расстояний от двух фиксированных фокусов постоянно.

Если обозначить через a половину расстояния между фокусами овала, а через b^2 — величину произведения расстояний от точек овала до фокусов, то легко вывести следующее выражение для *овала Кассини*:

$$[(x-a)^2+y^2][(x+a)^2+y^2]=b^4.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов мы получим уравнение *овала Кассини* в следующем виде:

$$(x^2+y^2+a^2)^2-4a^2x^2=b^4.$$

Геометрические фигуры, соответствующие уравнению *овала Кассини*, имеют вид, представленный на рис. 2.4. Как следует из рис. 2.4, *овалы Кассини* имеют четыре характерных формы, которая зависит от соотношения между a и b.

Если $b \geq 2a$, то *овал Кассини* представляет собой выпуклую кривую (рис. 2.4, *а*), подобную эллипсу. Если $a < b < 2a$, тогда в *овале Кассини* возникает вогнутая перемычка (рис. 2.4, *б*). Если $a = b$, тогда перемычка смыкается и *овал Кассини* превращается в фигуру, напоминающую перевернутую цифру 8 (рис. 2.4, *в*). Эта кривая в математике известна под названием *лемнискаты Бернулли*, которую можно определить как геометрическое место точек, для которых произведение расстояний от двух фокусов равно квадрату половины расстояния между фокусами. Великий математик и физик Бернулли описал эту похожую на восьмерку поверхность в одной из своих статей, опубликованных в 1694 году. К сожалению, он не знал, что его лемниската — частный случай овалов, описанных Кассини четырнадцатью годами ранее.

Лемниската Бернулли обладает следующим замечательным математическим свойством. Если мы поинтересуемся, чему равна площадь одного крыла бабочки *лемнискаты Бернулли*, то придем к следующему замечательному результату: $S = a^2$, где a — половина фокусного расстояния лемнискаты.

Наконец, при $a > b$ *овал Кассини* распадается на две независимые фигуры (рис. 2.4, *г*).

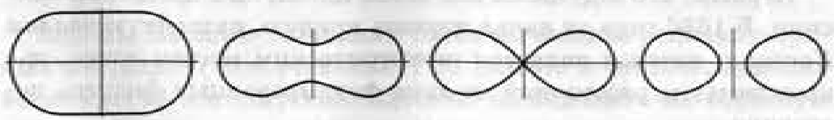


Рис. 2.4. Овалы Кассини

Зададимся теперь следующим вопросом: какая фигура получится при разрезании тора (бублика)? Вы уже догадались, что это *овалы Кассини*. Если вы посмотрите на картинки разрезанных торов, представленных на рис. 2.5, то увидите там все варианты рассмотренных выше таких уже знакомых *овалов Кассини*.

Возникает вопрос: с какой целью Кассини разработал теорию *овалов Кассини*? Оказывается, он заинтересовался этими кривыми, преследуя чисто практические цели. Он пришел к этим кривым, пытаясь найти оптимальную математическую модель движения Земли вокруг Солнца. При этом Кассини показал, что выпуклый вариант этой кривой (рис. 2.4, *а*) для планетарных ор-

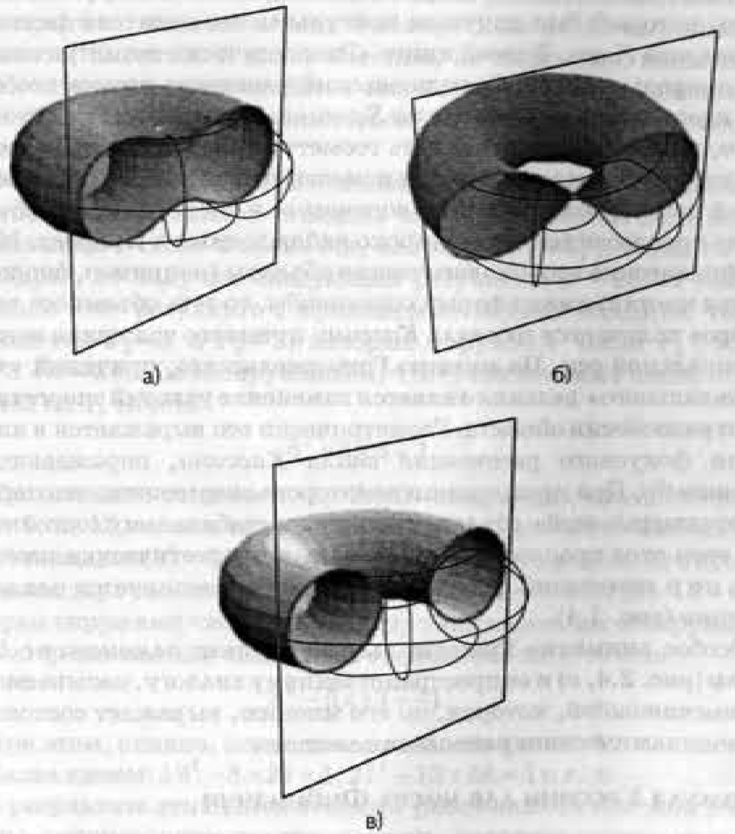


Рис. 2.5. Разрезы тора (бублика)

бит подходит больше, чем эллипс, предложенный Кеплером. Кто же все-таки прав: Кеплер или Кассини? По каким орбитам движутся планеты — *эллипсам Кеплера* или *овалам Кассини*? При маленьком эксцентриситете (у орбиты Марса полуоси отличаются на 1/11 часть, у орбиты Земли — на 1/65) линии эллипса и овала Кассини практически совпадают... И все-таки при всем восхищении идеями Кассини мы должны признать, что согласно законам Ньютона и закону всемирного тяготения траектории движения тел описывается эллипсом или параболой в зависимости от начальных условий.

В современной науке идея *овалов Кассини* привлекла внимание известного польского журналиста и ученого Яна Гржеджельского, который был научным консультантом писателя-фантаста Станислава Лема. В своей книге «Энергетически-геометрический код природы» (1986) Гржеджельский развивает весьма необычные идеи, связанные с *овалами Кассини*. По мнению Гржеджельского, геометрия Природы есть геометрия *овалов Кассини*, которые изменяют свою форму при изменении фокусного расстояния. Такой подход позволяет дать логическое и энергетическое объяснение процессов деления, широко наблюдаемых в Природе. Многие физические или биологические объекты (например, биологическая клетка) имеют форму *кассиноиды*, то есть объемного тела, которое получается из *овала Кассини* путем его вращения вокруг вертикальной оси. По мнению Гржеджельского, причиной «кассиноидального» деления является изменение условий энергетического равновесия объекта. Геометрически это выражается в изменении фокусного расстояния *овала Кассини*, порождающего *кассиноиду*. При превышении некоторого энергетического порога «кассиноидальный» объект стремится к стабильному состоянию; при этом этот процесс требует не только энергетических изменений, но и изменений формы, что хорошо моделируется *овалами Кассини* (рис. 2.4).

Особое внимание Гржеджельский уделяет *лемнискате Бернулли* (рис. 2.4, *в*) и ее пространственному аналогу, называемому *лемнискатоидой*, которая, по его мнению, выражает состояние термодинамического равновесия системы.

Формула Кассини для чисел Фибоначчи

История науки умалчивает, почему Кассини увлекся числами Фибоначчи. Скорее всего это было просто хобби великого астронома. В то время многие серьезные ученые увлекались числами Фибоначчи и Золотым сечением. Напомним, что эти математические объекты были также увлечением Иоганна Кеплера, современника Кассини.

Рассмотрим ряд Фибоначчи F_n, расширенный в сторону отрицательных значений аргумента n (см. табл. 2.3).

Как упоминалось выше, члены расширенного ряда Фибоначчи F_n и F_{-n} обладают рядом чудесных математических свойств. Например, для нечетных $n = 2k + 1$ члены последовательностей F_n и F_{-n} совпадают, то есть $F_{2k+1} = F_{-2k-1}$, а для четных $n = 2k$ они противоположны по знаку, то есть: $F_{2k} = -F_{-2k}$. Ясно, что такое предельно простое и тем не менее весьма удивительное свойство расширенного числового ряда Фибоначчи не могло не привлечь внимания Кассини. И далее Кассини, по-видимому, попытался найти еще некоторые свойства этого замечательного числового ряда. Например, он мог попытаться найти связь между соседними числами Фибоначчи.

Возможно, Кассини обратил внимание на следующую закономерность, связывающую соседние числа Фибоначчи. Если взять произвольное число Фибоначчи, например $F_5 = 5$, и возвести его в квадрат, то получим следующий результат: $5^2 = 25$. А теперь сравним этот результат с произведением двух соседних чисел Фибоначчи $F_4 = 3$ и $F_6 = 8$, которые окружают число $F_5 = 5$, то есть $3 \times 8 = 24$. Мы обнаруживаем, что сравниваемые числа отличаются на 1, то есть

$$5^2 - 3 \times 8 = 1.$$

Проделаем то же самое с «тройкой» следующих чисел Фибоначчи — 5, 8, 13, то есть сначала возведем среднее число Фибоначчи $F_6 = 8$ в квадрат ($8^2 = 64$), после чего сравним этот результат с произведением двух соседних с 8 чисел Фибоначчи — 5 и 13 ($5 \times 13 = 65$), которые окружают число 8. К нашему удивлению, мы обнаруживаем, что сравниваемые числа тоже отличаются на 1, то есть

$$8^2 - 5 \times 13 = -1.$$

При этом, однако, полученная разность равна −1.

Далее имеем: $13^2 - 8 \times 21 = 1; 21^2 - 13 \times 34 = 1$ и т. д.

В результате этих элементарных рассуждений Кассини обнаружил удивительную закономерность, которую можно сформулировать так.

Квадрат некоторого числа Фибоначчи F_n всегда отличается от произведения двух соседних чисел Фибоначчи F_{n-1} и F_{n+1}, которые его окружают, на 1, причем знак этой единицы зависит от аргумента n числа Фибоначчи F_n; если индекс n является четным числом, то число 1 берется с минусом, а если нечетным, то с плюсом.

Указанное свойство чисел Фибоначчи Кассини выразил в виде следующей общей математической формулы:

$$F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}, \tag{2.31}$$

которая справедлива для любого целого $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

Эта удивительная формула вызывает благоговейный трепет, если представить себе, что она справедлива для любого значения n (напомним, что n может принимать любое значение для целого числа в пределах от $-\infty$ до $+\infty$), и истинное эстетическое наслаждение, потому что чередование $+1$ и -1 в указанном выше математическом выражении при последовательном прохождении всех чисел Фибоначчи от $-\infty$ до $+\infty$ вызывает неосознанное чувство ритма и гармонии.

Эта знаменитая математическая формула и называется *формулой Кассини* в честь великого астронома Джовани Доменико Кассини, который ее впервые открыл.

2.6. Теорема Пифагора и числа Фибоначчи

Теорема Пифагора

Как известно, *теорема Пифагора* является едва ли не самой знаменитой теоремой геометрии, которую помнит каждый человек, который когда-либо учился в средней школе и, возможно, успел начисто забыть всю математику. Суть этой теоремы чрезвычайно проста. Теорема утверждает, что в прямоугольном треугольнике катеты a и b связаны с гипотенузой c следующим простым соотношением:

$$a^2 + b^2 = c^2. \tag{2.32}$$

Несмотря на ее предельную простоту, *теорема Пифагора*, по мнению многих математиков, относится к разряду наиболее выдающихся математических теорем за всю историю математики. Выше мы уже приводили широко известное высказывание Иоганна Кеплера, касающееся *теоремы Пифагора* и *Золотого сечения*. Из всего необозримого множества геометрических результатов и теорем Кеплер выделил только два результата, которые он причислил к разряду «сокровищ геометрии»: *теорему Пифагора* и *задачу о делении отрезка в крайнем и среднем отношении* (так в старину называлась *задача о Золотом сечении*).

Пифагоровы треугольники

Среди бесконечного количества прямоугольных треугольников, удовлетворяющих соотношению (2.32), особый интерес всегда вызывали так называемые *пифагоровы треугольники*, стороны которых являются целыми числами. Несомненно, *пифагоровы треугольники* также относятся к разряду «сокровищ геометрии», а поиски таких треугольников представляют одну из увлекательных страниц в истории математики. Наиболее широко известным *пифагоровым треугольником* является прямоугольный треугольник со сторонами 4, 3 и 5. Он назывался также *«священным»* или *«египетским»*, так как широко использовался в египетской культуре (рис. 2.6). Как упоминалось, именно этот треугольник представляет собой главную геометрическую идею *пирамиды Хефрена* в Гизе.

Для *египетского треугольника* на рис. 2.6 теорема Пифагора (2.32) принимает следующий числовой вид:

$$4^2 + 3^2 = 5^2. \tag{2.33}$$

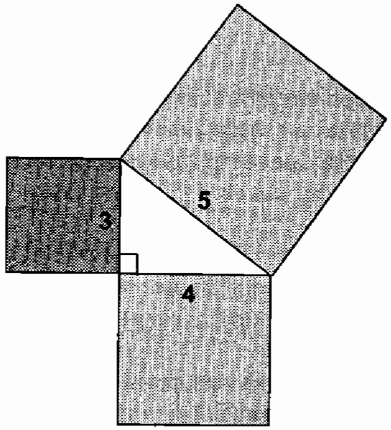


Рис. 2.6. «Священный», или «египетский», треугольник

Существует легенда, что именно соотношение (2.33) использовалось египетскими землемерами и строителями для определения прямого угла на плоскости. Для этого использовалась веревка длиной, например, 12 м, которая специальными петлями или узлами была разделена на три части в 3, 4 и 5 м. Для определения прямого угла египетский землемер натягивал одну из частей веревки, например длиной 3 м, и фиксировал ее на земле с помощью специальных колышков, забиваемых в две петли. Затем веревка натягивалась с помощью третьей петли, после чего эта петля фиксировалась с помощью колышка. Ясно, что угол, образуемый между двумя меньшими сторонами образованного таким образом треугольника, в точности равнялся 90°. Считалось, что при закладке пирамид такую ритуальную процедуру по определению прямых углов основания пирамиды на земле выполнял сам фараон.

Пифагоровы треугольники Фибоначчи

Возникает вопрос: существуют ли другие *пифагоровы треугольники*, кроме *«египетского» треугольника*? Теория чисел Фибоначчи дает оригинальный ответ на этот вопрос.

Рассмотрим «четверку» соседних чисел Фибоначчи

$$F_n,\, F_{n+1},\, F_{n+2},\, F_{n+3}. \tag{2.34}$$

В качестве примера (2.34) рассмотрим следующую «четверку»:

$$1, 2, 3, 5. \tag{2.35}$$

Рассмотрим теперь следующую процедуру, которая приведет нас к бесконечному числу *пифагоровых треугольников*:

1. Перемножим два средних или внутренних числа из (2.35): $2 \times 3 = 6$. Для общего случая (2.34) мы должны вычислить произведение: $F_{n+1}F_{n+2}$.

2. Удвоим результат: $2 \times 6 = 12$. Для общего случая (2.34) мы должны вычислить произведение $a = 2F_{n+1}F_{n+2}$. Полученное число a равно первой стороне (катету) искомого *пифагорова треугольника*.

3. Перемножим теперь два внешних числа Фибоначчи из (2.35): $1 \times 5 = 5$. Для общего случая (2.34) мы должны вычислить произведение: $b = F_nF_{n+3}$. Число b представляет собой вторую сторону (катет) *пифагорова треугольника*.

4. Третья, самая длинная сторона (гипотенуза) находится путем суммирования квадратов внутренних чисел из (2.35): $2^2 = 4$ и $3^2 = 9$, то есть их сумма равна: $4 + 9 = 13$. Для общего случая (2.34) мы имеем: $c = F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2$.

Нетрудно убедиться, что стороны a, b и c прямоугольного треугольника действительно образуют *пифагоров треугольник*, поскольку:

$$12^2 + 5^2 = 13^2.$$

Для общего случая (2.34) стороны *пифагорова треугольника* связаны соотношением:

$$(2F_{n+1}F_{n+2})^2 + (F_nF_{n+3})^2 = (F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2)^2. \tag{2.36}$$

Путем непосредственных вычислений легко проверить, что это тождество справедливо для всех начальных «четверок» чисел Фибоначчи типа (2.35). Действительно, для $n = 1$ «четверка» чисел Фибоначчи имеет вид:

$$1, 1, 2, 3. \tag{2.37}$$

В соответствии с приведенным выше алгоритмом мы можем вычислить стороны *пифагорова треугольника* для этого случая:

$$a = 2\times1\times3 = 4;\; b = 1\times3 = 3;\; c = 1^2 + 2^2 = 1+4 = 5.$$

Таким образом, случай (2.37) порождает *«священный»*, или *«египетский»*, треугольник, для которого теорема Пифагора имеет вид (2.33).

Рассмотрим *пифагоров треугольник* для случая $n = 3$. Для этого случая «четверка» чисел Фибоначчи выглядит следующим образом:

$$2, 3, 5, 8. \tag{2.38}$$

Тогда в соответствии с приведенным выше алгоритмом стороны *пифагорова треугольника* могут быть найдены так:

$$a = 2\times3\times5 = 30;\; b = 2\times8 = 16;\; c = 3^2 + 5^2 = 9+25 = 34.$$

Теорема Пифагора для этого случая выглядит так:

$$30^2 + 16^2 = 34^2.$$

Наконец, для $n = 4$ «четверка» чисел Фибоначчи имеет вид:

$$3, 5, 8, 13, \tag{2.39}$$

а стороны *пифагорова треугольника* соответственно равны:

$$a = 2\times5\times8 = 80;\ b = 3\times13 = 39;\ c = 5^2 + 8^2 = 35 + 64 = 89.$$

Теорема Пифагора для этого случая выглядит так:

$$80^2 + 39^2 = 89^2.$$

Таблица 2.4 дает представление о *пифагоровых треугольниках Фибоначчи* для начальных значений n.

Таблица 2.4. Пифагоровы треугольники Фибоначчи

n	F_n	F_{n+1}	F_{n+2}	F_{n+3}	a	b	c
1	1	1	2	3	4	3	5
2	1	2	3	5	12	5	13
3	2	3	5	8	30	16	34
4	3	5	8	13	80	39	89
6	8	13	21	34	546	272	610
7	13	21	34	55	1428	715	1597
8	21	34	55	89	3740	1869	4181
9	34	55	89	144	9790	4869	10946

Важно подчеркнуть, что сторона *c пифагоровых треугольников* из приведенной выше таблицы вычисляется по формуле:

$$c = F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2. \tag{2.40}$$

Используя тождество (2.15), мы можем записать:

$$c = F_{2(n+1)+1},$$

то есть гипотенуза *c пифагорова треугольника Фибоначчи* всегда должна быть равна некоторому числу Фибоначчи, что подтверждается табл. 2.4.

Пифагоровы треугольники Люка

Оказывается, что приведенная выше процедура построения *пифагоровых треугольников* справедлива не только для чисел Фибоначчи, но также и для чисел Люка (2.21). Например, первая «четверка» 1, 3, 4, 7 чисел Люка из (2.21) приводит к *пифагорову треугольнику Люка* со сторонами:

$$a = 2\times3\times4 = 24;\ b = 1\times7 = 7;\ c = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25.$$

а) б) в) г)

Рис. 1

Примеры пентагональной симметрии в природе: а) — китайская роза, б) — яблоко в разрезе, в) — морская звезда, г) — кактус

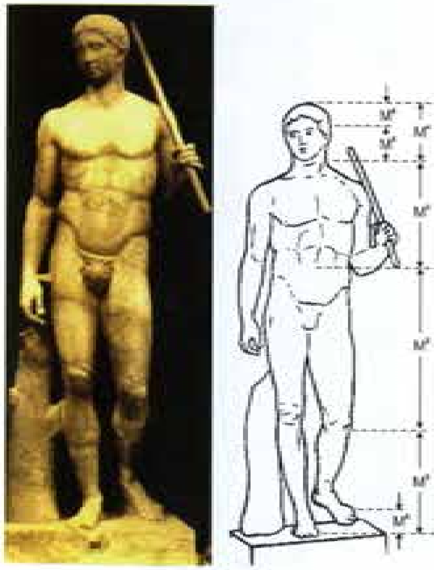


Рис. 2

Поликлет. Дорифор

Рис. 3

Венера Милосская

Рис. 4
Микеланджело. Святое семейство

Рис. 5
Рафаэль. Распятие

Рис. 6
Микеланджело. Давид

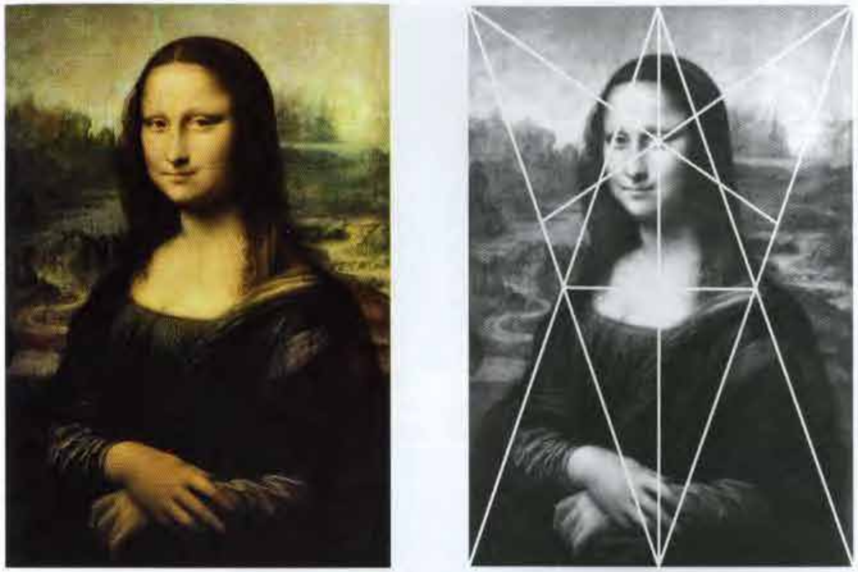


Рис. 7
Картина Леонардо да Винчи «Мона Лиза»
и ее гармонический анализ

Рис. 8
Церковь Сан Пиетро ин Монторио
в Риме (архитектор Браманте)

Рис. 9
Смольный собор в Санкт-Петербурге
(архитектор Растрелли)

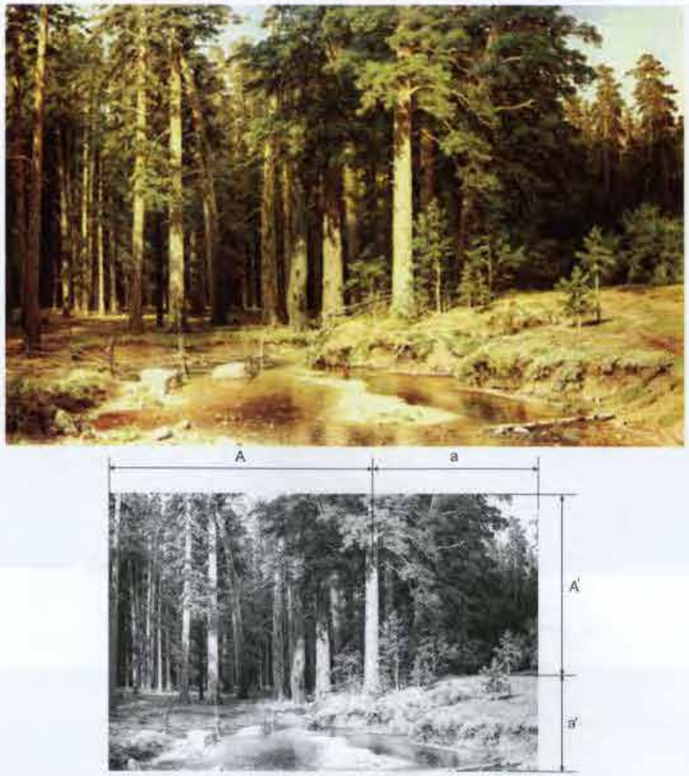


Рис. 10
Картина И. Шишкина «Корабельная роща» и ее гармонический анализ

Рис. 11
К. Васильев. У окна

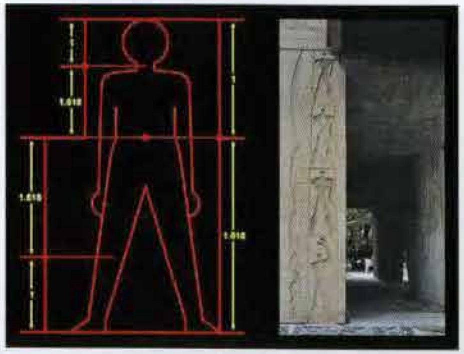


Рис. 12
Корбюзье. Модулор

Рис. 13
А. Архипенко. Draped Woman (1911)

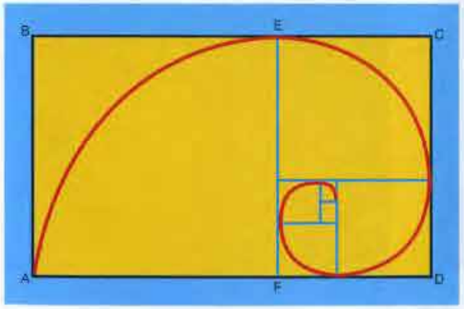


Рис. 14
Спираль Фибоначчи

Рис. 15
Спираль наутилуса

Рис. 16
Галактика имеет форму спирали

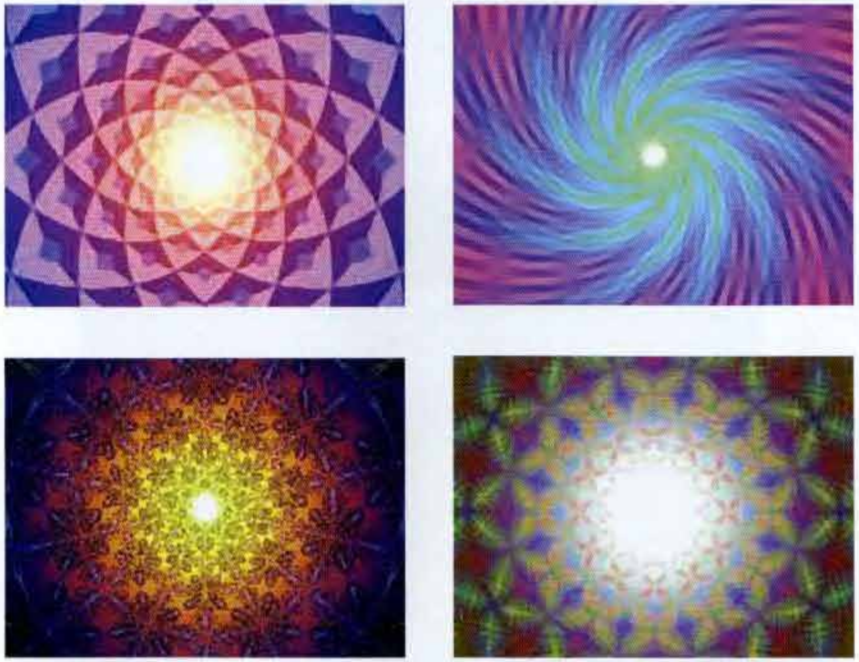


Рис. 17
Художественные образы, построенные с использованием спиралей Фибоначчи

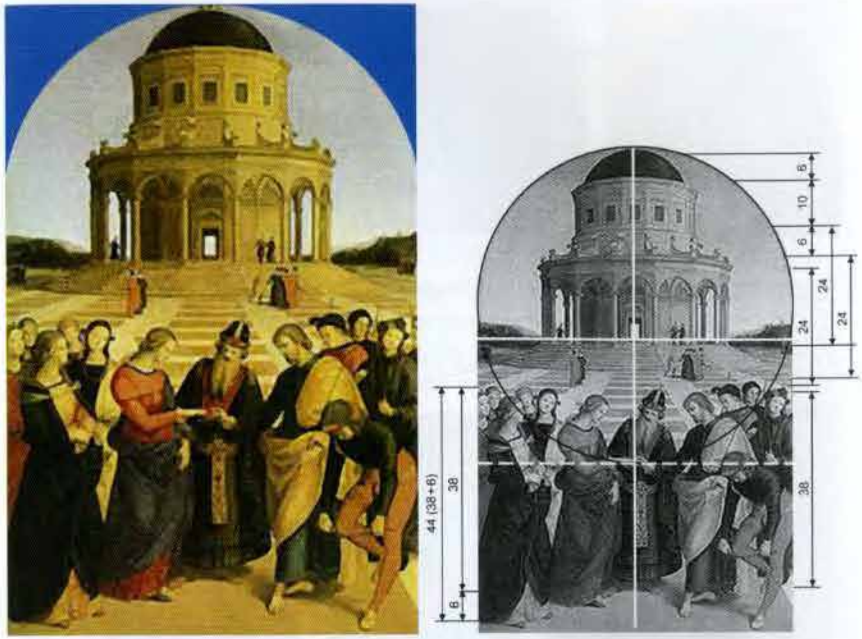


Рис. 18
Картина Рафаэля «Обручение Марии» и ее гармонический анализ

Рис. 19
Винтовая симметрия

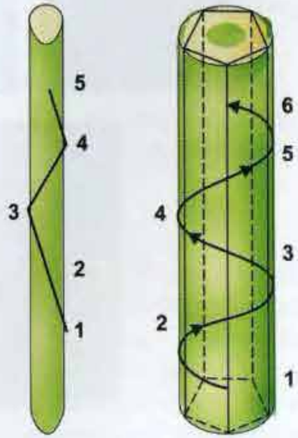


Рис. 20
Винтовые оси на стеблях растений

а) б) в) г)

Рис. 21

Филлотаксисные структуры:
а) — сосновая шишка, б) — головка подсолнечника,
в) — ананас, г) — головка цветной капусты

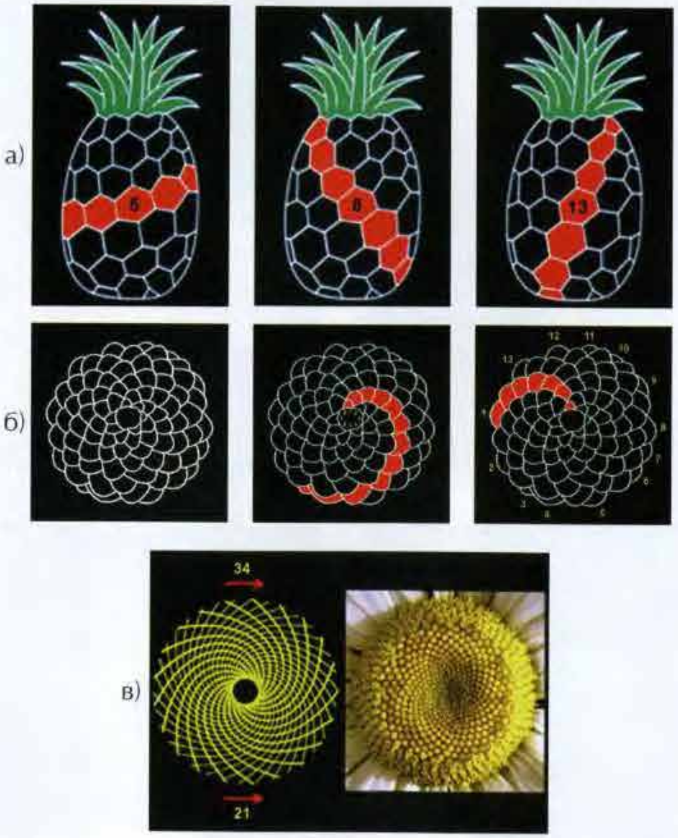


Рис. 22

Геометрические модели филлотаксисных структур:
а) — ананас, б) — сосновая шишка, в) — головка подсолнечника

Для этого *пифагорова треугольника* теорема Пифагора имеет вид:

$$24^2 + 7^2 = 25^2.$$

Вторая «четверка» 3, 4, 7, 11 чисел Люка из (2.21) приводит еще к одному *пифагорову треугольнику Люка* со сторонами:

$$a = 2\times 4\times 7 = 56;\ b = 3\times 11 = 33;\ c = 4^2 + 7^2 = 16 + 49 = 65.$$

Для этого *пифагорова треугольника* теорема Пифагора имеет вид:

$$56^2 + 33^2 = 65^2.$$

Таблица 2.5 дает представление о пифагоровых треугольниках Люка для начальных значений n.

Таблица 2.5. Пифагоровы треугольники Люка

n	L_n	L_{n+1}	L_{n+2}	L_{n+3}	a	b	c
1	1	3	4	7	24	7	25
2	3	4	7	11	56	33	65
3	4	7	11	18	154	72	170
4	7	11	18	29	396	203	445
5	11	18	29	47	1044	517	1165
6	18	29	47	76	2726	1368	3050
7	29	47	76	123	7144	3567	7985
8	47	76	123	199	18696	9353	20905
9	76	123	199	322	48954	24472	54730

Прямоугольные треугольники Фибоначчи и Люка

Рассмотрим тождество (2.15). Это тожество можно трактовать как выражение, задающее теорему Пифагора (2.32) для прямоугольного треугольника со сторонами

$$a = F_n;\ b = F_{n+1};\ c = \sqrt{F(2n+1)}.$$

Будем называть такие прямоугольные треугольники *фибоначчиевыми*, поскольку они основаны на важном тождестве (2.15), связывающем числа Фибоначчи. Заметим, что прямоугольные треугольники Фибоначчи не являются пифагоровыми. Тем не менее они представляют собой интересный класс прямоугольных треугольников, основанных на числах Фибоначчи.

Ниже приведена таблица треугольников Фибоначчи для начальных значений n.

Таблица 2.6. Прямоугольные треугольники Фибоначчи

n	F_n^2	F_{2n+1}^2	$F_{2n}+1$
1	1	1	2
2	1	4	5
3	4	9	13
4	9	25	34
5	25	64	89
6	64	169	175
7	169	441	610
8	441	1156	1597
9	1156	3025	4181

Заметим также, что подобные треугольники могут быть построены и на основе чисел Люка, если воспользоваться тожеством (2.26), которое задает прямоугольный треугольник Люка со сторонами

$$a = L_n;\ b = L_n;\ c = \sqrt{5L(2n+1)}.$$

Таблица 2.7 дает представление о прямоугольных треугольниках Люка для начальных значений n.

Таблица 2.7. Прямоугольные треугольники Люка

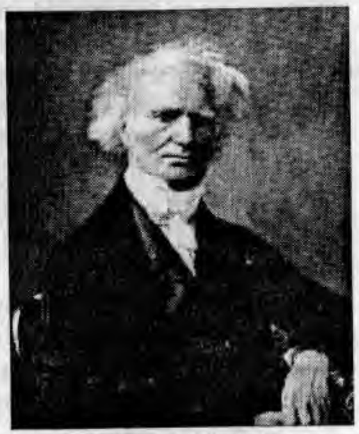
n	L_n^2	L_{n+1}^2	$5F_{2n}+1$
1	1	9	10
2	9	16	25
3	16	49	65
4	49	121	170
5	121	324	445
6	324	841	1165
7	841	2209	3050
8	2209	5776	7985
9	5776	15129	7305

Установленная выше связь чисел Фибоначчи и Люка с *теоремой Пифагора*, позволившая нам доказать существование бес-

конечного количества *пифагоровых треугольников Фибоначчи* и *Люка*, является дополнительным свидетельством фундаментального характера чисел Фибоначчи и Люка!

2.7. Формулы Бине

Жак Филипп Мари Бине



Жак Филипп Мари Бине (1786–1856)

Спустя два столетия после научных открытий Иоганна Кеплера, который более, чем кто-либо из его современников, понял роль Золотого сечения в развитии науки и сравнил его с теоремой Пифагора, в XIX веке вновь появляется интерес к числам Фибоначчи и Золотому сечению в математике.

В этой связи нам нельзя не упомянуть о двух энтузиастах чисел Фибоначчи, французских математиках *Люка* и *Бине*.

Мы уже рассказывали выше о французском математике XIX века Франсуа Эдуарде Анатоле Люка (1842–1891), который своими математическими исследованиями возродил интерес научной общественности XIX века к числам Фибоначчи и Золотому сечению, после чего работы по числам Фибоначчи «стали размножаться, как кролики Фибоначчи».

Другим энтузиастом чисел Фибоначчи в XIX веке стал Жак Филипп Мари Бине (1786–1856), о котором известно, что он был известным французским математиком и астрономом, членом Парижской академии наук.

Бине родился 2 февраля 1786 году в Рене (Франция). В 1804 году он поступил в Политехническую школу в Париже и после ее окончания в 1806-м работал в департаменте мостов и дорог французского правительства.

В 1807-м Бине стал преподавателем Политехнической школы, а через год — ассистентом-профессором прикладного анализа и начертательной геометрии.

Им опубликовано много статей по механике, математике, астрономии. В математике Бине ввел термин *бета-функция*, рассмотрел линейные разностные уравнения с переменными коэффициентами. Бине исследовал основания теории матриц, и его работы в этом направлении были затем продолжены другими исследователями. В 1812 году он открыл правило умножения матриц, и одно это открытие прославило его имя больше, чем другие работы. Среди различных почестей, которых Бине был удостоен еще при жизни, следует упомянуть, что в 1843 году он был выбран в Парижскую академию наук.

Однако в теорию чисел Фибоначчи Бине вошел как автор знаменитых математических формул, известных в математике под названием *формулы Бине*. Эти формулы связывают числа Фибоначчи и Люка с золотой пропорцией и, несомненно, принадлежат к разряду выдающихся математических формул, когда-либо полученных в математике.

Исследования Люка и Бине стали той стартовой площадкой, с которой во второй половине XX века начала свое победное шествие в математике Ассоциация Фибоначчи, организованная группой американских математиков в 1963 году.

Вывод формул Бине

Для вывода формул Бине воспользуемся замечательным тождеством (1.8), которое связывает соседние степени золотой пропорции.

Запишем сначала выражения для минус-первой, нулевой и первой степеней золотой пропорции в «явном виде»:

$$\tau^{-1} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2};\ \tau^{0} = 1 = \frac{2+0\sqrt{5}}{2};\ \tau^{1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \qquad (2.41)$$

Используя исходные значения для степеней золотой пропорции, задаваемые (2.41), и применяя тождество (1.8), мы можем представить вторую, третью и четвертую степени золотой пропорции в «явной форме»:

$$\tau^{2} = \tau^{1} + \tau^{0} = \frac{3+\sqrt{5}}{2};\ \tau^{3} = \tau^{2} + \tau^{1} = \frac{4+2\sqrt{5}}{2};$$
$$\tau^{4} = \tau^{3} + \tau^{2} = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}. \qquad (2.42)$$

Можно ли усмотреть в формулах (2.41), (2.42) какую-то закономерность? Прежде всего заметим, что все выражения для степени золотой пропорции имеет одну и ту же форму:

$$\frac{A+B\sqrt{5}}{2}.$$

Что же собой представляют числовые последовательности A и B в этих формулах? Если начать с выражения для нулевой степени золотой пропорции τ^0, то нетрудно убедиться, что ряд чисел A представляет собой последовательность чисел 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, ..., а ряд чисел B представляет собой последовательность чисел 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... Но первая последовательность представляет собой числа Люка, а вторая — числа Фибоначчи! Из этих примеров мы можем предположить, что в общем виде формула, которая позволяет представить любую (n-ю) степень золотой пропорции с использованием чисел Люка L_n и чисел Фибоначчи F_n должна иметь следующий вид:

$$\tau^{n} = \frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}. \qquad (2.43)$$

И это, действительно, было доказано Бине еще в XIX веке, причем формула (2.43) оказалась справедливой для любого целого n, принимающего значения из множества 0, ±1, ±2, ±3, ...

Используя формулу (2.43), можно очень просто выразить расширенные числа Люка L_n и расширенные числа Фибоначчи F_n через золотую пропорцию. Для этого достаточно воспользоваться формулой (2.43) и записать выражения для суммы или разности n-х степеней золотой пропорции $\tau^n + \tau^{-n}$ и $\tau^n - \tau^{-n}$ в виде:

$$\tau^{n} + \tau^{-n} = \frac{(L_n + L_{-n}) + (F_n + F_{-n})\sqrt{5}}{2};$$
$$\tau^{n} - \tau^{-n} = \frac{(L_n + L_{-n}) + (F_n + F_{-n})\sqrt{5}}{2}. \qquad (2.44–2.45)$$

Рассмотрим теперь, во что вырождаются формулы (2.44) и (2.45) для четных значений индекса $n = 2k$. Для этого вспомним одно чудесное свойство чисел Фибоначчи: для четных значений n числа Фибоначчи F_{2k} и F_{-2k} равны по абсолютной величине, но противоположны по знаку, то есть $F_{-2k} = -F_{2k}$, а числа Люка L_{2k} и L_{-2k} для этого случая совпадают, то есть $L_{-2k} = L_{2k}$. Тогда с учетом этого замечания формулы (2.44), (2.45) принимают следующий простой вид:

$$\tau^{2k}+\tau^{-2k}=L_{2k};$$
$$\tau^{2k}-\tau^{-2k}=F_{2k}. \qquad (2.46\text{–}2.47)$$

Для нечетных значений $n=2k+1$ имеют место соотношения для чисел Фибоначчи и Люка: $F_{-2k-1}=F_{2k+1}$ и $L_{-2k-1}=-L_{2k+1}$. Тогда для этого случая формулы (2.44), (2.45) сводятся к следующему:

$$\tau^{2k+1}+\tau^{-(2k+1)}=F_{2k+1}\sqrt{5};$$
$$\tau^{2k+1}-\tau^{-2(k+1)}=L_{2k+1}. \qquad (2.48\text{–}2.49)$$

А теперь воспользуемся формулами (2.46–2.49), чтобы представить выражения для чисел Люка и Фибоначчи в более компактной форме:

$$L_n=\begin{cases}\tau^n+\tau^{-n} & \text{для } n=2k;\\ \tau^n-\tau^{-n} & \text{для } n=2k+1.\end{cases}$$
$$F_n=\begin{cases}\dfrac{\tau^n+\tau^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для } n=2k+1;\\ \dfrac{\tau^n-\tau^{-n}}{\sqrt{5}} & \text{для } n=2k.\end{cases} \qquad (2.50\text{–}2.51)$$

Анализ формул (2.50), (2.51) дает нам возможность ощутить истинное «эстетическое наслаждение» и еще раз убедиться в мощи человеческого разума. Действительно, ведь мы знаем, что числа Фибоначчи и числа Люка всегда являются целыми числами. С другой стороны, любая степень золотой пропорции является иррациональным числом. Отсюда вытекает, что целые числа L_n и F_n с помощью формул (2.50), (2.51) выражаются через специальные иррациональные числа.

Например, число Люка 3 ($n=2$) согласно (2.50) может быть представлено как

$$3=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-2}, \qquad (2.52)$$

а число Фибоначчи 5 ($n=5$) как

$$5=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-5}}{\sqrt{5}}. \qquad (2.53)$$

Для того чтобы убедиться в справедливости тождества (2.52), достаточно вспомнить, что согласно (2.43) справедливы следующие тождества:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2=\frac{L_2+F_2\sqrt{5}}{2}=\frac{3+\sqrt{5}}{2};\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-2}=\frac{L_{-2}+F_{-2}\sqrt{5}}{2}=\frac{3-\sqrt{5}}{2}.$$

Если теперь подставить эти выражения в правую часть выражения (2.52), то получим:

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}. \qquad (2.54)$$

В результате суммирования все «иррациональности» в (2.54) взаимно уничтожаются, и мы получим в сумме число 3, то есть тождество (2.52) является истинным.

Для того чтобы убедиться в справедливости тождества (2.53), достаточно вспомнить, что согласно (2.43) справедливы следующие тождества:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5=\frac{L_5+F_5\sqrt{5}}{2}=\frac{11+5\sqrt{5}}{2};$$
$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-5}=\frac{L_{-5}+F_{-5}\sqrt{5}}{2}=\frac{-11+5\sqrt{5}}{2}.$$

Если теперь подставить эти выражения в правую часть тождества (2.53), то получим:

$$\frac{10\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}=5,$$

откуда вытекает справедливость тождества (2.53).

Заметим, что эти рассуждения носят общий характер, то есть для любого числа Люка или Фибоначчи, задаваемых с помощью формул (2.50), (2.51), все «иррациональности» в правой части тождеств (2.50), (2.51) всегда взаимно уничтожаются, и мы приходим, в конечном итоге, к целым числам.

2.8. Гиперболические функции Фибоначчи и Люка

Драматическая судьба великого математического открытия

День 7 февраля (19 февраля по старому стилю) 1826 года является переломным моментом в развитии математики и всей науки в целом. Именно в этот день юный российский математик Николай Лобачевский выступил с сообщением «Сжатое изложение начал геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных» на заседании Отделения физико-математических наук Казанского университета. Свою геометрию Лобачевский назвал «воображаемой», в отличие от Евклидовой геометрии, названной им «употребительной». Геометрию Лобачевского называют также «гиперболической» на том основании, что для описания основных отношений новой геометрии Лобачевский использовал *гиперболические функции*.

Гиперболический синус:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \tag{2.55}$$

Гиперболический косинус:

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \tag{2.56}$$

Как видим из формул (2.55), (2.56), в основе гиперболических функций лежит число e (основание натуральных логарифмов).

Кто же впервые ввел в математику гиперболические функции? В истории математики считается, что эта честь принадлежит итальянскому математику Винценцо Рицатти (1707–1775).

История математики показывает, что в математике существует «странная» традиция, касающаяся выдающихся математических открытий. Многие математики (даже очень известные), как правило, оказываются не способными оценить по достоинству математические достижения своих современников. Революционные

математические открытия или остаются незамеченными, или подвергаются насмешкам со стороны современников. И только спустя 40–50 лет начинается их признание и всеобщее восхищение (напомним истории с признанием теорий Абеля и Галуа).

В этом отношении печальный пример дала русская наука XIX столетия при оценке гениального математического открытия Николая Лобачевского. Важность проблемы, решенной Лобачевским, не была вовремя осознана и оценена современниками. В течение всей своей жизни ученый вел борьбу за признание новой геометрии, разрабатывая и углубляя все новые применения и обоснования своих идей. Нередко он встречал полное непонимание и даже оскорбительное отношение со стороны специалистов-математиков. Как известно, по решению Совета Казанского университета от 19 августа 1832 года его замечательный труд «О началах геометрии», явившийся первым опубликованным исследованием в новой области и открывший в математике период разработки неевклидовых геометрий, был направлен в Российскую академию наук «в знак уважения сему высокому сословию мужей». По поручению академии работу Лобачевского рассмотрел и сделал о ней в ноябре 1832 года устное сообщение известный математик академик М. В. Остроградский. В своем рапорте он писал о том, что автор, по-видимому, задался целью писать таким образом, чтобы его нельзя было понять. В итоге академик Остроградский пришел к выводу:

> «Все, что я понял в геометрии г-на Лобачевского, ниже посредственного...»

И в заключение он написал:

> «Книга г-на ректора Лобачевского опорочена ошибкой, небрежно изложена и, следовательно, не заслуживает внимания академии».

А через два года, в октябре 1834 года, в журнале «Сын отечества» появилась анонимная рецензия на труд Лобачевского, в которой писалось:

> «Как можно подумать, чтобы г-н Лобачевский, ординарный профессор математики, написал с какою-нибудь серьезной целью книгу, которая не много принесла бы чести и последнему приходскому учителю. Если не ученость, то, по крайней мере, здравый смысл должен иметь каждый учитель, а в новой геометрии нередко недостает и сего последнего».

В заключение рецензент предлагал назвать книгу Лобачевского «Сатира на геометрию, карикатура на геометрию».

13—2391

Лобачевский умер в 1856 году тяжело больным, ослепшим и непризнанным в своей стране. Признание Лобачевского пришло из западной науки благодаря гениальному немецкому математику Гауссу, который оказался единственным математиком, сумевшим по достоинству оценить труды Лобачевского еще при его жизни. По предложению Гаусса Лобачевский в 1842 году был избран членом-корреспондентом Геттингенского ученого общества. Большую роль в признании трудов Лобачевского сыграли исследования Бельтрами, Клейна и Пуанкаре.

Об этом печальном случае не стоило бы говорить так подробно, если бы не одно обстоятельство. Недавно при Российской академии наук создана комиссия по борьбе с лженаукой во главе с академиком Кругляковым, которому научная общественность сразу же присвоила почетное звание «главного инквизитора российской науки». И членам этой комиссии необходимо хорошо помнить об одном из позорных случаев в истории Российской академии наук, когда именно Академия наук, это «высокое сословие мужей», возглавила травлю Николая Лобачевского, который по праву считается одним из величайших математических гениев не только российской, но и всей мировой науки. Не следует при этом забывать и о «народном академике» Трофиме Денисовиче Лысенко, который при поддержке партии и правительства и молчаливом согласии российских академиков выступил с яростными разоблачениями генетики, этой «буржуазной лженауки».

Четырехмерный мир Минковского

XX век стал новым этапом в эволюции пространственных представлений во всех сферах науки. Толчок глобальному процессу изменения представлений о геометрии пространства был дан физикой. Для физики вопрос связи с геометрией, с понятием пространства — это вопрос, обусловленный глубокой связью пространства, времени и материи. До создания неевклидовой геометрии не было необходимости в доказательстве взаимодействия механики Ньютона и геометрии Евклида. Это считалось очевидным фактом. Такая необходимость возникла в конце XIX — начале XX века, когда в физике было накоплено много новых наблюдений и фактов, не укладывающихся в систему классической концепции пространства. Из исследований Максвелла по электродинамике, опытов Майкельсона по измерению скорости

света, других научных данных непосредственно вытекал вопрос о соответствии евклидовой модели пространства свойствам реального физического пространства. Объяснение новых физических фактов, ставивших в тупик отношение физики с классической геометрией, дала *теория относительности Эйнштейна*, одним из главных результатов которой стал вывод о неевклидовом характере геометрии реального пространства. Теория относительности впервые показала, что пространство и время — единое целое, континуум, что свойства пространства и времени органически взаимосвязаны.

В 1908 году, то есть спустя три года после обнародования специальной теории относительности, немецкий математик Г. Минковский представил геометрическое обоснование специальной теории относительности.

Идея Минковского характеризуется двумя существенными особенностями. Во-первых, предлагаемая им геометрическая пространственно-временная модель четырехмерна, в ней пространственные и временные координаты объединены в общую координатную систему.

Положение материальной точки в пространстве Минковского определяется точкой $M\ (x, y, z, t)$, называемой *мировой точкой*. Во-вторых, геометрическая связь между пространственными и временными координатами в системе Минковского имеет неевклидов характер, то есть данная модель обнаруживает некие особые свойства реального пространства-времени, которые не могут быть описаны в рамках «традиционной» евклидовой геометрии.

Геометрически связь между пространственной (x) и временной (t) координатами в пространстве Минковского устанавливается с помощью *гиперболического поворота* — движения, аналогичного обычному повороту декартовой системы в евклидовом пространстве. При этом координаты x и t произвольной точки преобразуются согласно формулам:

$$x' = x\,\mathrm{ch}\,\psi + t\,\mathrm{sh}\,\psi;$$
$$t' = x\,\mathrm{sh}\,\psi + t\,\mathrm{ch}\,\psi,$$

где ψ — угол гиперболического поворота, ch и sh — гиперболические синус и косинус соответственно, определяемые по формулам (2.55), (2.56).

Из данной модели вытекает оригинальная геометрическая интерпретация знаменитых формул Лоренца

$$x' = \frac{x+vt}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}; \; t' = \frac{t+\frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}},$$

где v — скорость системы, c — скорость света.

Заметим, что в геометрии Минковского преобразования Лоренца — не что иное, как выраженные в терминах физики зависимости гиперболической тригонометрии. В сущности, геометрия Минковского раскрывает гиперболическую природу всего множества математических формул теории относительности. В то же время из нее следует, что геометрия, с помощью которой моделируются аналитические соотношения теории относительности, объективно отражает неевклидов характер физического пространства-времени.

Гиперболические функции Фибоначчи и Люка (подход Стахова и Ткаченко)

Рассказывая о математике гармонии, нельзя пройти мимо одного новейшего математического открытия, сделанного недавно двумя украинскими математиками — Алексеем Стаховым и Иваном Ткаченко. Речь идет о так называемых гиперболических функциях Фибоначчи и Люка. Первая в истории науки статья с описанием нового класса гиперболических функций, называемая «Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи», опубликована по рекомендации академика Ю. А. Митропольского в 1993 году в весьма престижном научном журнале «Доклады Академии наук Украины».

Сравним формулы для гиперболических функций синуса (2.55) и косинуса (2.56) с выведенными выше формулами Бине (2.50), (2.51). Легко усмотреть, что формулы Бине (2.50), (2.51) очень уж напоминают по своей математической структуре соответствующие формулы (2.55) и (2.56) для гиперболического синуса и косинуса. Именно эта определенная внешняя схожесть формул Бине (2.50), (2.51) с формулами (2.55) и (2.56) стала «стартовой площадкой» для введения нового класса гиперболических функций, что, как уже упоминалось, было сделано Алексеем Стаховым и Иваном Ткаченко в 1993 году.

Для введения гиперболических функций Фибоначчи и Люка перепишем формулы (2.50), (2.51) в следующем виде:

$$L_n = \begin{cases} \tau^{2k} + \tau^{-2k}; \\ \tau^{2k+1} - \tau^{-(2k+1)}. \end{cases}$$

$$F_n = \begin{cases} \dfrac{\tau^{2k+1} + \tau^{-(2k+1)}}{\sqrt{5}}; \\ \dfrac{\tau^{2k} - \tau^{-2k}}{\sqrt{5}}, \end{cases} \qquad (2.57\text{–}2.58)$$

где дискретная переменная k принимает значения из множества $0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$

Заменим теперь дискретную переменную k в формулах (2.57), (2.58) непрерывной переменной x, принимающей значения из множества действительных чисел, и для полученных таким путем четырех непрерывных функций переменной x введем следующие определения:

Гиперболический синус Фибоначчи:

$$\mathrm{sF}\, x = \frac{\tau^{2x} - \tau^{-2x}}{\sqrt{5}}. \qquad (2.59)$$

Гиперболический косинус Фибоначчи:

$$\mathrm{cF}\, x = \frac{\tau^{2x+1} + \tau^{-(2x+1)}}{\sqrt{5}}. \qquad (2.60)$$

Гиперболический синус Люка:

$$\mathrm{sL}\, x = \tau^{2x+1} - \tau^{-(2x+1)}. \qquad (2.61)$$

Гиперболический косинус Люка:

$$\mathrm{cL}\, x = \tau^{2x} + \tau^{-2x}. \qquad (2.62)$$

Заметим, что для дискретных значений переменной $x = k$ гиперболические функции Фибоначчи и Люка (2.59–2.62) совпадают с числами Фибоначчи и числами Люка, причем

$$\mathrm{sF}\, k = F_{2k}; \; \mathrm{cF}\, k = F_{2k+1}; \; \mathrm{sL}\, k = L_{2k+1}; \; \mathrm{cL}\, k = L_{2k}, \qquad (2.63)$$

где дискретная переменная k принимает свои значения из множества: $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Вдумаемся в соотношения (2.63). Эти соотношения показывают, что числа Фибоначчи и числа Люка являются частными («дискретными») случаями гиперболических функций Фибоначчи и Люка (2.59–2.62), которые в «дискретных точках» $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. совпадают с числами Фибоначчи и Люка. Самое любопытное состоит в том, что любое «непрерывное» тождество для гиперболических функций Фибоначчи и Люка превращается в соответствующее «дискретное» тождество для чисел Фибоначчи путем простой подстановки $x = k$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$ Это означает, что «дискретная» до сих пор «теория чисел Фибоначчи» как бы «вырождается», так как она заменяется теперь более общей, «непрерывной» теорией гиперболических функций Фибоначчи и Люка. А это, в свою очередь, означает, что математикам-фибоначчистам надо «сушить весла» и искать другое приложение своих талантов, так как созданная ими «теория чисел Фибоначчи» просто становится частным случаем более общей «теории гиперболических функций Фибоначчи и Люка». А если говорить серьезно, то введение гиперболических функций Фибоначчи и Люка переводит «теорию чисел Фибоначчи» на новый уровень развития.

Используя (2.63), по любому известному «дискретному» тождеству для чисел Фибоначчи и Люка можно найти соответствующее «непрерывное» тождество для гиперболических функции Фибоначчи и Люка и наоборот. В качестве примера рассмотрим введенную выше «формулу Кассини» (2.31), связывающую три соседних числа Фибоначчи.

Заметим, что тождество (2.31) справедливо для всех целых n ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$). Мы можем, однако, записать «формулу Кассини» (2.31) в виде пары двух формул для четных $n = 2k$ и нечетных $n = 2k + 1$ значений дискретной переменной n:

$$F_{2k}^2 - F_{2k-1}F_{2k+1} = (-1)^{2k+1} = -1;$$
$$F_{2k+1}^2 - F_{2k}F_{2k+2} = (-1)^{2k+2} = 1. \qquad (2.64\text{–}2.65)$$

Используя (2.63), мы можем записать формулы (2.64), (2.65) в терминах гиперболических функций Фибоначчи:

$$\mathrm{sF}^2 k - \mathrm{cF}(k-1)\,\mathrm{cF}\,k = -1;$$
$$\mathrm{cF}^2 k - \mathrm{sF}\,k\,\mathrm{cF}(k+1) = 1, \qquad (2.66\text{–}2.67)$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$

Заменяя дискретную переменную k в формулах (2.66), (2.67) на непрерывную переменную x, получим следующие «непрерывные» тождества, выраженные в терминах гиперболических функций Фибоначчи:

$$\mathrm{sF}^2 x - \mathrm{cF}(x-1)\,\mathrm{cF}\,k = -1;$$
$$\mathrm{cF}^2 x - \mathrm{sF}\,k\,\mathrm{cF}(x+1) = 1. \qquad (2.68\text{–}2.69)$$

Заметим, что формулы (2.68), (2.69), связывающие между собой синусы и косинусы Фибоначчи, в теории гиперболических функций Фибоначчи и Люка, по-видимому, играют такую же важную роль, что и знаменитые формулы

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1;\ \mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{sh}^2\alpha = 1.$$

справедливые для тригонометрических и классических гиперболических функций. И наличие таких формул убеждают нас еще раз в том, что гиперболические функции Фибоначчи и Люка есть новый класс *элементарных функций*, отражающих некоторые глубокие математические закономерности окружающего нас мира.

Симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка (подход Стахова и Розина)

Теория гиперболических функций Фибоначчи и Люка получила дальнейшее развитие в статье *On a new class of hyperbolic functions*, опубликованной в 2005 году А. П. Стаховым и Б. Н. Розиным в международном журнале *Chaos, Solitons & Fractals* (2005, V. 23, № 2). В этой статье введены так называемые *симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка.*

Анализ гиперболических функций Фибоначчи и Люка, задаваемых (2.59–2.62), показывает, что, в отличие от классических гиперболических функций (2.55), (2.56), график функции косинуса Фибоначчи (2.60) является несимметричным относительно оси x, а график функции синуса Люка (2.61) является несимметричным относительно начала координат, что ограничивает область эффективного приложения нового класса гиперболических функций.

В упомянутой выше работе Стахова и Розина введены следующие определения гиперболических функций Фибоначчи и Люка, в которых «асимметрия» этих функций устранена.

Симметричный гиперболический синус Фибоначчи:

$$\mathrm{sFs}\,x=\frac{\tau^{x}-\tau^{-x}}{\sqrt{5}}. \qquad (2.70)$$

Симметричный гиперболический косинус Фибоначчи:

$$\mathrm{cFs}\,x=\frac{\tau^{x}+\tau^{-x}}{\sqrt{5}}. \qquad (2.71)$$

Симметричный гиперболический синус Люка:

$$\mathrm{sLs}\,x=\tau^{x}-\tau^{-x}. \qquad (2.72)$$

Симметричный гиперболический косинус Люка:

$$\mathrm{cLs}\,x=\tau^{x}+\tau^{-x}. \qquad (2.73)$$

Числа Фибоначчи и Люка однозначно определяются через симметричные гиперболические синусы и косинусы Фибоначчи и Люка следующим образом:

$$F_n=\begin{cases}\mathrm{sFs}\,n \text{ для } n=2k;\\ \mathrm{cFs}\,n \text{ для } n=2k+1\end{cases};\quad L_n=\begin{cases}\mathrm{sLs}\,n \text{ для } n=2k;\\ \mathrm{cLs}\,n \text{ для } n=2k+1.\end{cases} \qquad (2.74)$$

Необходимо отметить, что согласно (2.74) числам Фибоначчи с четными номерами всегда соответствует симметричный синус Фибоначчи $\mathrm{sFs}\,x$, а с нечетными номерами — симметричный косинус Фибоначчи $\mathrm{cFs}\,x$, в то время как числам Люка с четными номерами всегда соответствует симметричный косинус Люка $\mathrm{cLs}\,x$, а с нечетными номерами — симметричный синус Люка $\mathrm{sLs}\,x$.

Введенные выше симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка связаны между собой следующими простыми соотношениями:

$$\mathrm{sFs}\,x=\frac{\mathrm{sLs}\,x}{\sqrt{5}};\ \mathrm{cFs}\,x=\frac{\mathrm{cLs}\,x}{\sqrt{5}}. \qquad (2.75)$$

Графики функций (2.70–2.73), представленные на рис. 2.7 и рис. 2.8, имеют симметричный вид и подобны графикам для классических гиперболических функций.

В упомянутой выше статье А. П. Стахова и Б. Н. Розина проведено детальное исследование математических свойств нового класса гиперболических функций.

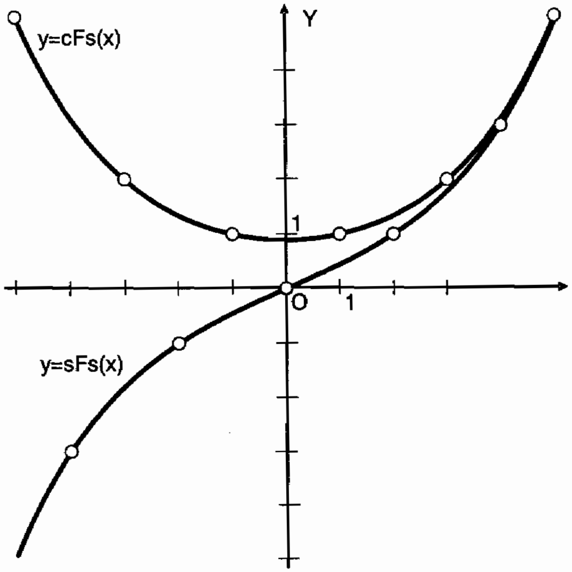


Рис. 2.7. Симметричные гиперболические функции Фибоначчи

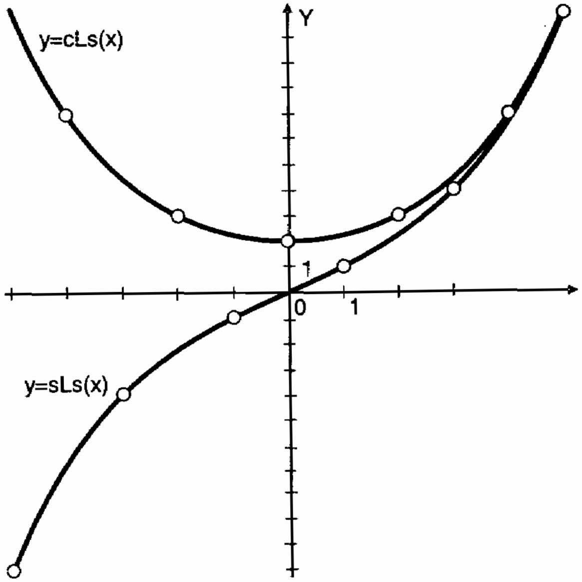


Рис. 2.8. Симметричные гиперболические функции Люка

При этом доказано, что симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка, с одной стороны, обладают *рекуррентными* свойствами, подобными свойствам чисел Фибоначчи и Люка, с другой стороны, *гиперболическими* свойствами, подобными свойствам классических гиперболических функций (2.55), (2.56).

Рекуррентные свойства симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка вместе с соответствующими тождествами для чисел Фибоначчи и Люка приведены в табл. 2.8.

Например, знаменитая «формула Кассини» (2.31) в терминах симметричных гиперболических функций Фибоначчи представляется в виде двух «непрерывных» тождеств:

$$\mathrm{sFs}^2 x - \mathrm{cFs}(x+1)\,\mathrm{cFs}(x-1) = -1;$$
$$\mathrm{cFs}^2 x - \mathrm{sFs}(x+1)\,\mathrm{sFs}(x-1) = 1. \qquad (2.76\text{–}2.77)$$

Эти тождества можно рассматривать как обобщение «формулы Кассини» (2.31) на непрерывную область.

Симметричное представление гиперболических функций Фибоначчи и Люка обладает свойствами, подобными классическим гиперболическим функциям. Ниже в табл. 2.9 для сравнения приведены некоторые известные свойства классических гиперболических функций и соответствующие свойства симметричных функций Фибоначчи и Люка.

Например, наиболее важное тождество для классических гиперболических функций

$$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1 \qquad (2.78)$$

выглядит следующим образом соответственно для симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка:

$$\mathrm{cFs}^2 x - \mathrm{sFs}^2 x = \frac{4}{5};$$
$$\mathrm{cLs}^2 x - \mathrm{sLs}^2 x = 4. \qquad (2.79\text{–}2.80)$$

Таким образом, введенные выше симметричные гиперболические функции полностью сохраняют свойства классических гиперболических функций (табл. 2.9), но при этом обладают новыми («рекуррентными») свойствами, подобными свойствам чисел Фибоначчи и Люка (табл. 2.8).

Таблица 2.8. Рекуррентные свойства симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка

Тождества для чисел Фибоначчи и Люка	Тождества для симметричных функций Фибоначчи и Люка	
$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$	$\mathrm{sFs}(x+2) = \mathrm{cFs}(x+1) + \mathrm{sFs}\,x$	$\mathrm{cFs}(x+2) = \mathrm{sFs}(x+1) + \mathrm{cFs}\,x$
$F_n = -1^n F_{-n}$	$\mathrm{sFs}\,x = -\mathrm{sFs}(-x)$	$\mathrm{cFs}\,x = \mathrm{cFs}(-x)$
$F_{n+3} + F_n = 2F_{n+2}$	$\mathrm{sFs}(x+3) + \mathrm{cFs}\,x = 2\mathrm{cFs}(x+2)$	$\mathrm{cFs}(x+3) + \mathrm{sFs}\,x = 2\mathrm{sFs}(x+2)$
$F_{n+3} - F_n = 2F_{n+1}$	$\mathrm{sFs}(x+3) - \mathrm{cFs}\,x = 2\mathrm{sFs}(x+1)$	$\mathrm{cFs}(x+3) - \mathrm{sFs}\,x = 2\mathrm{cFs}(x+1)$
$F_{n+6} - F_n = 4F_{n+3}$	$\mathrm{sFs}(x+6) + \mathrm{sFs}\,x = 4\mathrm{cFs}(x+3)$	$\mathrm{cFs}(x+6) + \mathrm{cFs}\,x = 4\mathrm{sFs}(x+3)$
$F_{n+3} - 2F_n = L_n$	$\mathrm{sFs}(x+3) - 2\mathrm{cFs}\,x = \mathrm{sFs}\,x$	$\mathrm{cFs}(x+3) - 2\mathrm{sFs}\,x = \mathrm{cFs}\,x$
$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$	$\mathrm{sLs}(x+2) = \mathrm{cLs}(x+1) + \mathrm{sLs}\,x$	$\mathrm{cLs}(x+2) = \mathrm{sLs}(x+1) + \mathrm{cLs}\,x$
$L_n = (-1)^n L_{-n}$	$\mathrm{sLs}\,x = -\mathrm{sLs}\,x$	$\mathrm{cLs}\,x = \mathrm{cLs}(-x)$
$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^{n+1}$	$\mathrm{sFs}^2 x - \mathrm{cFs}(x+1)\,\mathrm{cFs}(x-1) = -1$	$\mathrm{cFs}^2 x - \mathrm{sFs}(x+1)\,\mathrm{sFs}(x-1) = 1$
$L_n^2 - 2(-1)^n = L_{2n}$	$\mathrm{sLs}^2 x + 2 = \mathrm{cLs}\,2x$	$\mathrm{cLs}^2 x - 2 = \mathrm{cLs}\,2x$
$L_n + L_{n+3} = 2L_{n+2}$	$\mathrm{sLs}\,x + \mathrm{cLs}(x+3) = 2\mathrm{sLs}(x+2)$	$\mathrm{cLs}\,x + \mathrm{sLs}(x+3) = 2\mathrm{cLs}(x+2)$
$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$	$\mathrm{sLs}(x-1) + \mathrm{sLs}(x+1) = 5\mathrm{sFs}\,x$	$\mathrm{cLs}(x-1) + \mathrm{cLs}(x+1) = 5\mathrm{cFs}\,x$
$L_n + 5F_n = 2L_{n+1}$	$\mathrm{sLs}\,x + 5\mathrm{cFs}\,x = \mathrm{cLs}(x+1)$	$\mathrm{cLs}\,x + 5\mathrm{sFs}\,x = \mathrm{sLs}(x+1)$
$F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2$	$\mathrm{cFs}(2x+1) = \mathrm{cFs}^2(n+1) + \mathrm{cFs}^2 x$	$\mathrm{cFs}(2x+1) = \mathrm{sFs}^2(n+1) + \mathrm{sFs}^2 x$
$L_{n+1}L_{n-1} - L_n^2 = -5(-1)^n$	$\mathrm{sLs}(x+1)\,\mathrm{sFs}(x-1) - \mathrm{cFs}^2 x = -5$	$\mathrm{cLs}(x+1)\,\mathrm{cLs}(x-1) - \mathrm{sFs}^2 x = 5$
$L_{n+1}^2 + L_n^2 = 5F_{2n+1}$	$\mathrm{sLs}^2(x+1) + \mathrm{sLs}^2 x = 5\mathrm{cFs}\,x$	$\mathrm{cLs}^2(x+1) + \mathrm{cLs}^2 x = 5\mathrm{cFs}\,x$
$F_{3n} = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3$	$\mathrm{sFs}\,3x = \mathrm{cFs}^3(x+1) + \mathrm{sFs}^3 x - \mathrm{cFs}^3(x-1)$	$\mathrm{cFs}\,3x = \mathrm{sFs}^3(x+1) + \mathrm{cFs}^3 x - \mathrm{sFs}^3(x-1)$

При этом, в отличие от классических гиперболических функций, новые гиперболические функции имеют «дискретный аналог» в виде чисел Фибоначчи и Люка, с которыми согласно (2.74) указанные функции совпадают, когда непрерывная переменная x принимает «дискретные» значения: 0, ±1, ±2, ±3, ...

Таблица 2.9. Гиперболические свойства симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка

Классические гиперболические функции	Симметричные функции Фибоначчи	Симметричные функции Люка
$\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = 1$	$\mathrm{cFs}^2 x - \mathrm{sFs}^2 x = \frac{4}{5}$	$\mathrm{cLs}^2 x - \mathrm{sLs}^2 x = 4$
$\mathrm{ch}\,(x \pm y) = \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y \pm \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{sh}\,y$	$\frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{cFs}\,(x \pm y) = \mathrm{cFs}\,x\,\mathrm{cFs}\,y \pm \mathrm{sFs}\,x\,\mathrm{sFs}\,y$	$2\mathrm{cFs}\,(x \pm y) = \mathrm{cFs}\,x\,\mathrm{cFs}\,y \pm \mathrm{sFs}\,x\,\mathrm{sFs}\,y$
$\mathrm{sh}\,(x \pm y) = \mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y \pm \mathrm{ch}\,x\,\mathrm{sh}\,y$	$\frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{sFs}\,(x \pm y) = \mathrm{sFs}\,x\,\mathrm{cFs}\,y \pm \mathrm{cFs}\,x\,\mathrm{sFs}\,y$	$2\mathrm{sFs}\,(x \pm y) = \mathrm{sFs}\,x\,\mathrm{cFs}\,y \pm \mathrm{cFs}\,x\,\mathrm{sFs}\,y$
$\mathrm{ch}\,2x = \mathrm{ch}^2 x + \mathrm{sh}^2 x$	$\frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{cFs}\,2x = \mathrm{cFs}^2 x + \mathrm{sFs}^2 x$	$2\mathrm{cFs}\,2x = \mathrm{cFs}^2 x + \mathrm{sFs}^2 x$
$\mathrm{sh}\,2x = 2\mathrm{sh}\,x + \mathrm{ch}\,x$	$\frac{1}{\sqrt{5}}\mathrm{sFs}\,2x = \mathrm{sFs}\,x\,\mathrm{cFs}\,x$	$\mathrm{sFs}\,2x = \mathrm{sFs}\,x\,\mathrm{cFs}\,x$

Заметим, что тождества (2.76–2.80), как и остальные тождества, приведенные в табл. 2.8 и 2.9, подчеркивают фундаментальный характер введенных выше гиперболических функций Фибоначчи и Люка.

2.9. Золотой шофар и геометрия Вселенной

Золотой шофар

В 2005 году международный журнал *Chaos, Solitons & Fractals* (2005, V.26, № 3) опубликовал статью Алексея Стахова и Бориса Розина *The Golden Shofar*. Эта статья посвящена теории функции 2-го порядка, основанной на Золотом сечении. Функция вытекает естественным образом из симметричных гиперболических функций Фибоначчи.

Мы не будем останавливаться на выводе выражения для такой функции, а запишем конечный результат.

$$z^2 = (\mathrm{cFs}\,x - y)(\mathrm{sFs}\,x + y), \qquad (2.81)$$

где $\mathrm{sFs}\,x$ и $\mathrm{cFs}\,x$ — соответственно симметричный гиперболический синус и косинус Фибоначчи, задаваемые (2.70), (2.71).

Как следует из (2.81), выражение (2.81) задает функцию z, зависящую от двух переменных x и y. Такая функция может быть представлена в виде некоторой криволинейной поверхности $z = f(x, y)$ в трехмерном пространстве (рис. 2.9).

Полученная криволинейная поверхность напоминает по своей форме рог или воронку с загибающимся вверх узким концом (рис. 2.9). По предложению Бориса Розина эта поверхность была названа «Золотой шофар» на том основании, что в переводе с иврита «шофар» означает «сила, мощь», а также «рог, в который трубят в Судный день».

Сенсационная статья немецких математиков

В 2004 году в весьма авторитетном международном журнале *Classical Quantum Gravity* опубликована сенсационная статья в области космологии. Статья называется *Hyperbolic Universes with a Horned Topology and the CMB Anisotropy* («Гиперболическая Вселенная с конической (рогоподобной) топологией и анизотро-

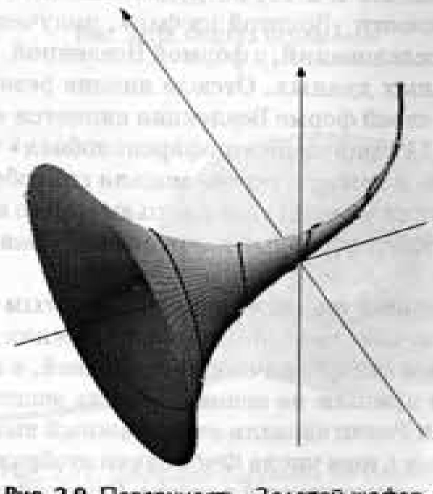


Рис. 2.9. Поверхность «Золотой шофар»

пия реликта» (авторы *Ralf Aurich, Sven Lustig, Frank Steiner, Holger Then*). Ее популярное изложение дано в статье Максима Борисова «Немецкие математики установили, что Вселенная по форме напоминает дудку». Статья опубликована на сайте «Академия Тринитаризма» (www.trinitas.ru/rus).

Анализ свежих астрофизических данных, и особенно данных по космическому микроволновому фону (реликтовое излучение), которые являются своего рода «снимком» Вселенной, которой было всего 380 тысяч лет от роду, позволил вывести уравнения, определяющие кривизну и топологию Вселенной в больших масштабах. И эти уравнения привели к сенсационному заключению, что Вселенная может иметь форму рога или горна. Точнее говоря, весь наш космос оказывается вытянут в этакую длинную трубку, с узким концом с одной стороны и раструбом с другой (рис. 2.10). Такая «конструкция» нашей Вселенной, кроме всего прочего, подразумевает, что она конечна, а в каких-то ее местах встречаются области, где можно увидеть собственный затылок. Возможно, для «здравомыслящих» людей все это прозвучит как полный бред или мечта сюрреалиста, однако выкладки математика Франка Штайнера из германского Университета Ульма и его коллег основаны на авторитетных экспериментальных данных, полученных в 2003 году знаменитым зондом *WMAP (NASA's Wilkinson Microwave Anisotropy Probe)*.

Сравнивая рис. 2.9 и 2.10, нетрудно заметить удивительную схожесть поверхности «Золотой шофар», полученной путем математических исследований, с формой Вселенной, основанной на экспериментальных данных. Отсюда вполне резонной является гипотеза, что по своей форме Вселенная является «шофароподобной». На рис. 2.11 приведена «шофароподобная» топология, которая, возможно, и лежит в основе модели гиперболической Вселенной, полученная в результате компьютерного моделирования функции «Золотой шофар» (моделирование проведено Борисом Розиным).

Из этой необычной аналогии между «Золотым шофаром», основанным на Золотом сечении и гиперболических функциях Фибоначчи, и формой гиперболической Вселенной, к которой немецкие математики пришли на основе анализа экспериментальных данных, Стахов и Розин сделали очень важный вывод: Золотое сечение и связанные с ним числа Фибоначчи отображают гармонию Вселенной как единение частей в целом. С другой стороны, рекуррентные последовательности Фибоначчи и Люка порождают новый класс гиперболических функций, обладающих не только всеми свойствами классических гиперболических функций, но и рекуррентными свойствами, подобными свойствам чисел Фибоначчи и Люка. И эти новые функции проявляют себя не только в биологическом мире («Законы филлотаксиса»), но, возможно, на всех уровнях организации материи.

Такой синтез гармонии, рекурсии и гиперболических функций, Стахов и Розин назвали *золотым гиперболическим подходом*. Из проведенного исследования вытекает актуальность использования *золотого гиперболического подхода* для современной физики и космологии.

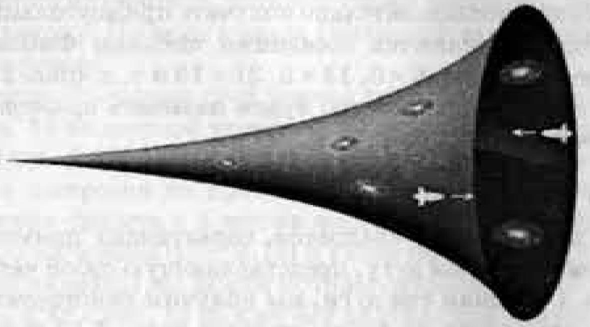


Рис. 2.10. Форма Вселенной

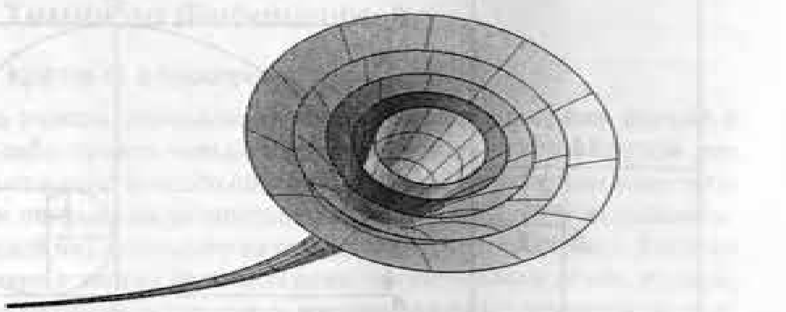


Рис. 2.11. «Шофароподобная» топология

2.10. Прямоугольник Фибоначчи и спираль Фибоначчи

Прямоугольники Фибоначчи

Рассмотрим ряд Фибоначчи: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... Возьмем два маленьких квадрата со стороной, равной 1 (площадь каждого квадрата будет равна 1) и сложим их вместе. В результате образуется прямоугольник размером 2×1, называемый «двойным квадратом». Затем на большей стороне «двойного квадрата» построим новый квадрат размером 2×2. В результате получим прямоугольник размером 3×2. На большей стороне этого прямоугольника построим новый квадрат размером 3×3; в результате получим новый прямоугольник размером 5×3. Продолжая этот процесс, будем последовательно получать прямоугольники, в которых стороны являются соседними числами Фибоначчи, то есть, имеют размеры: 8×5, 13×8, 21×13 и т. д. (рис. 2.12).

Такие прямоугольники мы будем называть *прямоугольниками Фибоначчи.*

Спираль Фибоначчи

А теперь в каждом из квадратов, образующих прямоугольник Фибоначчи, проведем дугу, представляющую собой четверть окружности. Соединяя эти дуги, мы получим некоторую кривую, которая напоминает по форме спираль (рис. 2.13 и рис. 14 на

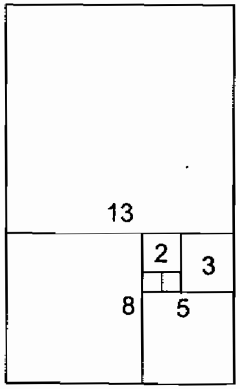


Рис. 2.12. Прямоугольник Фибоначчи

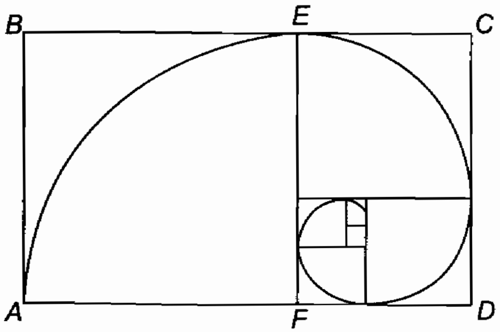


Рис. 2.13. Спираль Фибоначчи

цветной вклейке). Строго говоря, эта кривая не является спиралью с математической точки зрения, но она является очень хорошей аппроксимацией спиралей, которые широко встречаются в природе. В дальнейшем кривую на рис. 2.13 мы будем называть *спиралью Фибоначчи.*

Спираль Фибоначчи в природе

Великий поэт и естествоиспытатель Гёте считал спиральность одним из характерных признаков всех живых организмов, проявлением самой сокровенной сущности жизни. Спирально закручиваются усики растений и рога барана, по спирали происходит рост тканей в стволах деревьев, по спирали расположены семечки в подсолнечнике. Каждый из нас много раз восхищался формой морских раковин, которые также построены по спиралевидному закону. Но ведь и наша Галактика также имеет спиралевидную форму!

Начнем со спиралевидной формы раковины *наутилуса* (рис. 2.14 и рис. 15 на цветной вклейке). Ее сравнение со *спиралью Фибоначчи* (рис. 2.13) дает основание сделать вывод, что раковина наутилуса построена по принципу *спирали Фибоначчи.* Эту же форму можно увидеть и в других морских раковинах (рис. 2.16). Также в рогах барана (рис. 2.15) и Галактике (рис. 2.17 и рис. 16 на цветной вклейке) мы видим мотивы *спирали Фибоначчи.*

На рис. 2.18 и рис. 17 на цветной вклейке приведены примеры художественных образов, которые возникают в результате компьютерного моделирования *спиралей Фибоначчи.*

2.11. Химия по Фибоначчи

Закон кратных отношений

Многие ученые утверждают, что накопленная сумма знаний в какой-либо области только тогда может быть названа наукой, когда она от качественного описания переходит к четким количественным описаниям (известно следующее крылатое выражение: «В каждой науке столько науки, сколько математики»). К концу XVIII века в химии был накоплен значительный объем знаний, химики научились разлагать многие сложные вещества на простые, из простых получать сложные. Все актуальнее становился вопрос о количественном составе различных химических соеди-

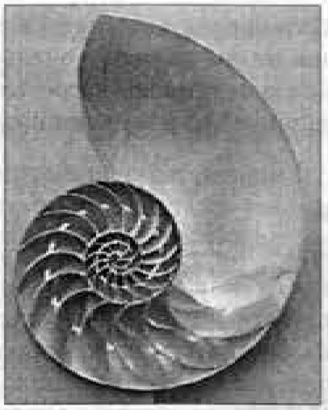


Рис. 2.14. Спираль наутилуса

Рис. 2.15. Рога барана закручиваются по спирали

Рис. 2.16. Спирали Фибоначчи в морских раковинах

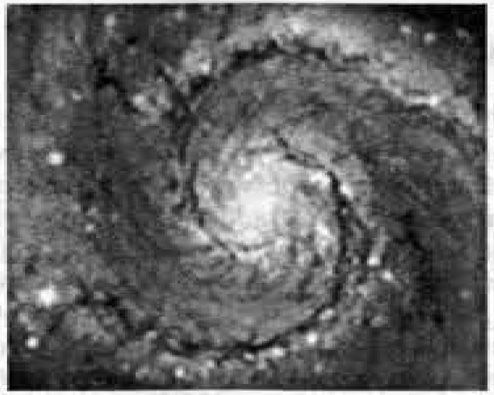
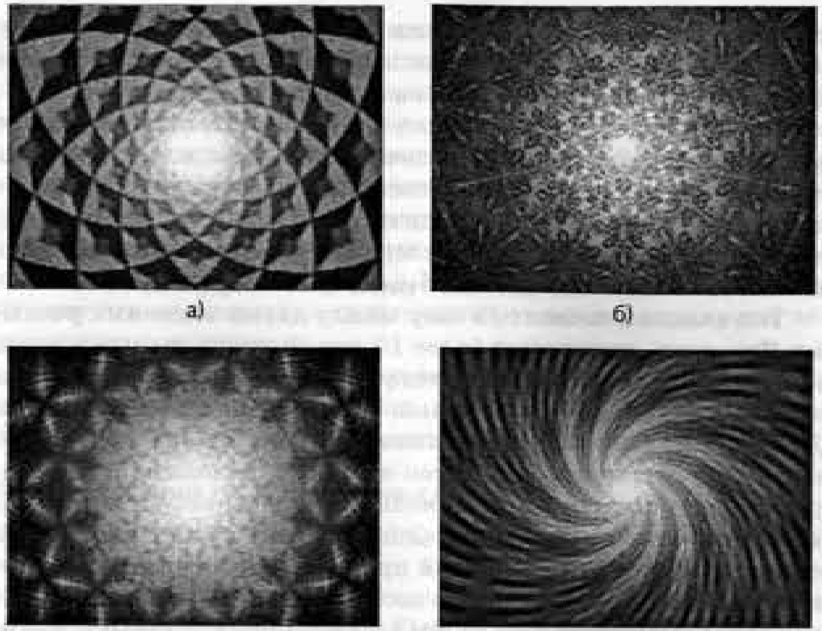


Рис. 2.17. Галактика имеет форму спирали



а) б) в) г)

Рис. 2.18. Художественные образы, построенные с использованием спиралей Фибоначчи

нений, о пропорциях простых веществ в составе сложных. Это было необходимо для создания стройной теории химического строения, и этого требовала практика производства различных химических продуктов.

Судьба забросила французского химика Клода Луи Бертолле (1748–1822) на соляные озера, расположенные в Египте. Здесь чернокожие рабочие под палящим солнцем добывали соду. Долгие месяцы Бертолле наблюдал, как происходит кристаллизация соды из соляного раствора. В результате длительных наблюдений Бертолле пришел к выводу, что вещества могут соединяться друг с другом в произвольных соотношениях, что химические соединения имеют непостоянный состав, который зависит от условий их получения и от массы реагирующих веществ.

Авторитет Бертолле в мире науки был достаточно высок, многие химики соглашались с его теорией строения химических веществ. Французский химик Жозеф Луи Пруст (1754–1826) был первым ученым, кто засомневался в правильности теории Бертолле. Решая практические задачи получения металлов из руд, он изучал состав различных окислов металлов и пришел к выводу, что соединения имеют строго постоянный состав, независимый от условий их образования. Он получал окись свинца из руд разных месторождений, различными способами, и всегда это соединение имело один и тот же состав. Если же соединений было несколько, как, например, у железа с кислородом, то состав их изменялся скачком, от одного постоянного соединения к другому.

Так возник знаменитый спор между двумя великими учеными Франции, длившийся более 10 лет. В конце концов ученые признали правоту Пруста, и был утвержден *закон постоянства состава химических соединений.* Трудами английского ученого Д. Дальтона (1766–1844) в химии утвердилось *атомарное учение* и был сформулирован *закон кратных отношений,* по которому между атомами в соединениях устанавливаются простые целочисленные соотношения. Это дало возможность описывать состав химических соединений простыми формулами. И сейчас каждый школьник знает, что состав воды описывается формулой H_2O, поваренной соли — NaCl, окиси цинка — ZnO и т. д. Химия стала точной наукой. Родилась даже целая область химии, изучающая соотношение атомов в соединениях и называемая *стехиометрией.*

Утверждение *закона кратных отношений* — одно из замечательных достижений мировой науки: из хаоса атомарных представлений выросла простая, стройная, красивая система. Атомы различных элементов могут образовывать бесконечно много всевозможных сочетаний, соединенных силами химической связи. Но только некоторые из них являются устойчивыми и сохраняются, а другие погибают, распадаются на более устойчивые соединения. А устойчивыми будут те сочетания атомов различных элементов, которые отвечают простым целочисленным отношениям компонентов. Удивительно просто, ясно, доходчиво и... отвечает представлениям древних пифагорейцев о главенствующей роли чисел в организации Вселенной.

Казалось бы, все стало на свое место, все стало ясным. Но в науке так не бывает, любое открытие рождает новые вопросы. Оказалось, что не все просто с целочисленными основаниями. Прежде всего неясно, что понимать под «небольшими» целыми числами атомов в формулах соединений. Пока изучали сравнительно простые химические соединения, отношение атомов в них обычно отвечало небольшим числам, например, в H_2O, Al_2O_3, Fe_3O_4, As_2O_5. Но круг изучаемых химических соединений стремительно расширялся. Появились формулы соединений со стехиометрическими коэффициентами 7, 9, 15, 21 и т. д. А когда начали изучать состав органических соединений, о простых целочисленных отношениях и говорить стало неудобно. Своеобразным чемпионом в стехиометрии стала ДНК бактериофага, описываемая формулой $C_{5750}H_{7227}N_{2215}O_{4131}S_{590}$. Какие уж тут отношения «небольших» целых чисел — здесь фигурируют четырехзначные величины.

Значит, не все просто в стехиометрических законах: простота здесь сочетается со сложностью, а вопрос о возможных соотношениях атомов в соединениях остается вообще открытым.

Исследования Н. А. Васютинского

Украинский ученый Николай Васютинский является по образованию и опыту работы химиком, геологом, металлургом и машиностроителем. Особенностью его научной работы является стремление найти критерии гармонии и красоты в природе и искусстве как основу совершенства и самоорганизации. И эти его идеи наиболее ярко воплощены в его книге «Золотая пропорция», опубликованной в 1990 году.

И поэтому не случайно, что именно Н. Васютинский впервые поставил следующий вопрос: не проявляются ли в формулах химических соединений числа Фибоначчи, не подчиняется ли химическая организация золотой пропорции?

Действительно, среди химических соединений нередко встречаются такие, в формулах которых имеются числа Фибоначчи 1, 2, 3, 5, 8 или числа Люка 1, 3, 4, 7, 11. Однако, возможно, это только случайные совпадения; среди всевозможных соотношений атомов в соединениях, количество которых практически безгранично, неудивительно встретить и числа из ряда Фибоначчи или ряда Люка. Только наличие в формулах соединений чисел указанных рядов в их закономерном, а не случайном сочетании позволило бы сделать вывод о связи состава таких соединений с золотой пропорцией.

Васютинскому удалось обнаружить такие соединения при изучении окислов урана и хрома. При окислении урана состав образующихся окислов изменяется не непрерывно, а скачкообразно —

от одного устойчивого соединения с целочисленным соотношением атомов к другому. Между окислами урана UO_2 и UO_3 образуется целый ряд промежуточных соединений, состав которых описывается формулами U_2O_5, U_3O_8, U_5O_{13}, U_8O_{21}, $U_{13}O_{34}$. Как видим, в них отношения атомов равны отношениям чисел Фибоначчи, расположенным через одно. Легко показать, что это отношение в пределе стремится к квадрату золотой пропорции. Н. Васютинский также установил, что состав окислов хрома Cr_2O_5, Cr_3O_8, Cr_5O_{13} определяют числа Фибоначчи.

Попытаемся глубже проанализировать состав окислов хрома и урана, подчиненных числам Фибоначчи. Нет ли здесь более глубоких закономерностей химической организации?

Общепринято состав химических соединений определять соотношением атомов элементов, входящих в эти соединения. Но можно химическое соединение рассматривать состоящим из атомов (ионов) различных элементов и подвижных валентных электронов, которые «отвечают» за образование химических связей между атомами. Так, например, в оксиде Cr_2O_5 на 7 атомов хрома и кислорода приходится 10 валентных электронов. Если провести аналогичные расчеты для всех оксидов ряда Фибоначчи, получим следующие отношения сумм атомов к суммам валентных электронов: 10 : 7; 16 : 11; 26 : 18; 42 : 29; 68 : 47. А теперь последовательно уменьшим числители и знаменатели этих дробей на ряд чисел Фибоначчи, отвечающих количеству атомов металлов в этих соединениях: 2, 3, 5, 8, 13. В результате получим отношения 8 : 5, 13 : 8, 21 : 13, 34 : 21, 55 : 34, то есть расположенные рядом числа Фибоначчи, отношение которых в пределе стремится к золотой пропорции.

Н. Васютинский приводит также соединения урана, описываемые числами Люка, например U_3O_7, U_4O_{11}, U_7O_{18}, $U_{11}O_{29}$, $U_{18}O_{47}$.

Таким образом, Н. Васютинский достаточно убедительно продемонстрировал, что химические соединения, организованные «по Фибоначчи», существуют!

В этой связи хотелось бы еще раз привлечь внимание к уравнению золотой пропорции n-й степени. Как было показано в параграфе 1.3, существует два типа уравнения золотой пропорции n-й степени, а именно:

$$x^n = F_n x^2 - F_{n-2};$$
$$x^n = F_n x + F_{n-1}. \qquad (2.82\text{–}2.83)$$

Важно подчеркнуть, что числовыми коэффициентами в уравнениях (2.82), (2.83) являются числа Фибоначчи F_n, F_{n-1}, F_{n-2}. Напомним, что главным математическим свойством уравнений (2.82), (2.83) является то, что все они имеют общий корень — золотую пропорцию.

Как упоминалось, при изучении энергетических соотношений в структуре молекулы бутадиена — ценного химического вещества, которое используется при производстве каучука — известный американский физик, Лауреат Нобелевской премии Ричард Фейнман неожиданно обнаружил, что эти соотношения описываются с помощью уравнения

$$x^4 = 3x + 2,$$

которое является частным случаем уравнения (2.83) для $n = 4$.

Но тогда есть весьма веские основания предположить, что энергетические состояния других химических соединений могут быть сведены к уравнениям золотой пропорции (2.82), (2.83). Таким образом, «химия по Фибоначчи» может оказаться интересным направлением химических исследований, которое может привести к углублению наших знаний об окружающем нас мире.

2.12. Симметрия природы и природа симметрии

Основные понятия симметрии

Еще одним фундаментальным понятием науки, которое наряду с понятием *гармонии* имеет отношение практически ко всем структурам природы, науки и искусства, является понятие *симметрии*.

Выдающийся математик Герман Вейль высоко оценил роль симметрии в современной науке:

> «Симметрия, как бы широко или узко мы ни понимали это слово, есть идея, с помощью которой человек пытался объяснить и создать порядок, красоту и совершенство».

Что же такое симметрия? Когда мы смотрим в зеркало, мы наблюдаем в нем свое отражение — это пример *зеркальной симметрии*. Зеркальное отражение — это пример так называемого ортогонального преобразования, изменяющего ориентацию.

В наиболее общем виде под *симметрией* в математике понимается такое преобразование пространства (плоскости), при котором каждая точка M переходит в другую точку M' относительно некоторой плоскости (или прямой) α, когда отрезок MM' является перпендикулярным плоскости (или прямой α) и делится ею пополам. Плоскость (прямая) α называется при этом плоскостью (или осью) симметрии.

К фундаментальным понятиям симметрии относятся *плоскость симметрии, ось симметрии, центр симметрии. Плоскостью симметрии P* называется такая плоскость, которая делит фигуру на две зеркально равные части, расположенные друг относительно друга так, как предмет и его зеркальное отражение. Например, изображенный на рис. 2.19 слева равнобедренный треугольник ABC высотой BD разделяется на две зеркально равные половины ABD и BCD; при этом высота BD является «следом» плоскости симметрии P, перпендикулярной плоскости треугольника. На рис. 2.19 справа изображен также прямоугольный параллелепипед (кирпичик, спичечный коробок), который имеет три взаимно перпендикулярные плоскости симметрии $3P$. Нетрудно установить, что куб обладает девятью плоскостями симметрии — $9P$.

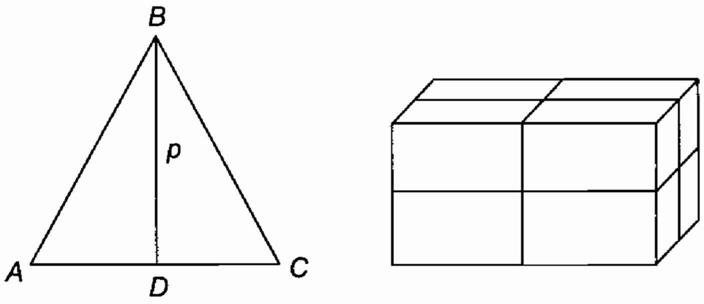


Рис. 2.19. Симметрия треугольника и параллелепипеда

Осью симметрии L называется такая прямая линия, вокруг которой симметричная фигура может быть повернута несколько раз таким образом, что каждый раз фигура «самосовмещается» сама с собой в пространстве. Число таких поворотов вокруг оси симметрии называется *порядком оси*. Например, равносторонний треугольник имеет *ось симметрии* L_3, проходящую через центр треугольника и перпендикулярную плоскости треугольника. Это означает, что существуют три способа поворота треугольника вокруг оси, при котором происходит его «самосовмещение». Ясно, что квадрат имеет *ось симметрии* L_4, а пентагон — L_5. Конус также имеет *ось симметрии*, причем поскольку число поворотов конуса вокруг своей оси симметрии, приводящих к «самосовмещению» бесконечно, то говорят, что конус имеет *ось симметрии* типа L_∞.

Наконец, *центром симметрии C* называется особая точка внутри фигуры, характеризующаяся тем, что любая проведенная через точку прямая по обе стороны от нее и на равных расстояниях встречает одинаковые (соответственные) точки фигуры. Идеальным примером такой фигуры является шар, центр которого и является его *центром симметрии*.

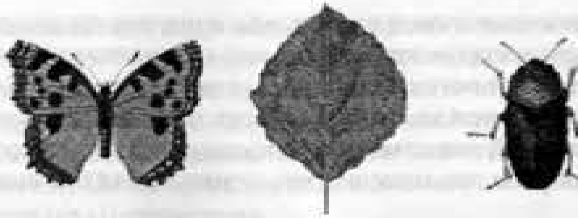
Законы симметрии в природе

Симметрия широко встречается в объектах живой и неживой природы. Например, симметрия в химии отражается в геометрической конфигурации молекул. Так, например, молекула метана CH_4 обладает симметрией тетраэдра. Понятие *симметрии* является центральным при исследовании кристаллов. При этом симметрия внешних форм кристаллов определяется симметрией его атомного строения, которая обуславливает и симметрию физических свойств кристалла.

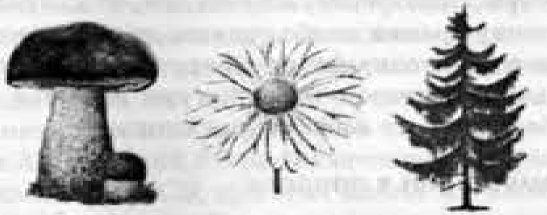
Особенно широко понятие *симметрии* применительно к физическим законам используется в современной физике. Если законы, устанавливающие соотношения между величинами или определяющие изменение этих величин со временем, не меняются при определенных операциях (преобразованиях), которым может быть подвергнута система, то говорят, что эти законы обладают симметрией (или инвариантны) относительно данных преобразований. Например, закон тяготения действует в любой точке пространства, то есть он является инвариантным по отношению переноса системы как целого в пространстве.

По мнению ученого-энциклопедиста академика В. И. Вернадского, «симметрия... охватывает свойства всех полей, с которыми имеет дело физик и химик».

На явление симметрии в живой природе обратили внимание еще пифагорейцы в связи с развитием ими учения о гармонии. Установлено, что в природе наиболее распространены два вида симметрии — *зеркальная* и *лучевая* (или *радиальная*) симметрии.



а)



б)

Рис. 2.20. Природные формы с симметрией: а) — «билатеральной», б) — «радиальной»

Зеркальной симметрией обладают бабочка, листок, жук (рис. 2.20, *а*), и часто такой вид симметрии называется *симметрией листка* или *билатеральной симметрией*. К формам с *лучевой симметрией* относятся гриб, ромашка, сосновое дерево (рис. 2.20, *б*), и часто такой вид симметрии называют также *«ромашко-грибной» симметрией*.

Еще в XIX веке исследования в этой области привели к заключению, что симметрия природных форм в значительной степени зависит от влияния сил земного тяготения, которое в каждой точке имеет симметрию конуса. В результате был найден следующий закон, которому подчиняются формы природных тел. *Все то, что растет или движется по вертикали, то есть вверх или вниз относительно земной поверхности, подчиняется радиально-лучевой («ромашко-грибной») симметрии. Все то, что растет и движется горизонтально или наклонно по отношению к земной поверхности, подчиняется билатеральной симметрии — «симметрии листка» (одна плоскость симметрии).*

Использование законов симметрии в искусстве

Принцип симметрии широко используется в искусстве. Бордюры, используемые в архитектурных и скульптурных произведениях, орнаменты, используемые в прикладном искусстве, — все это примеры использования симметрии.

Принцип симметрии очень часто используется совместно с принципом Золотого сечения. Таким примером может служить картина Рафаэля «Обручение Марии» (рис. 2.21 и рис. 18 на цветной вклейке). Эта картина была написана Рафаэлем примерно между 1503 и 1504 годами по заказу семейства Альбиццини для церкви Сан-Франческо в небольшом городке Читта ди Кастелло. Считается, что это произведение является высшим достижением раннего периода его творчества. Идеальный центрический храм второго плана — поистине удивительное творение архитектурного гения Рафаэля. Очертания его купола и изящные пологие дуги арок открытой галереи повторяют плавную линию полукруглого обрамления рамы, храм организует пространство, вносит гармонию в композиционное решение. По выражению А. Бенуа, в композиции картины «Обручение Марии» «все приведено к "золотой мере"», в ней нет ничего, что отвлекало бы внимание от главной группы — Марии и Иосифа. Картина вписывается в золотой прямоугольник. По горизонтали картина разделяется *осью симметрии*, а по вертикали — двумя горизонтальными «золотыми» линиями.

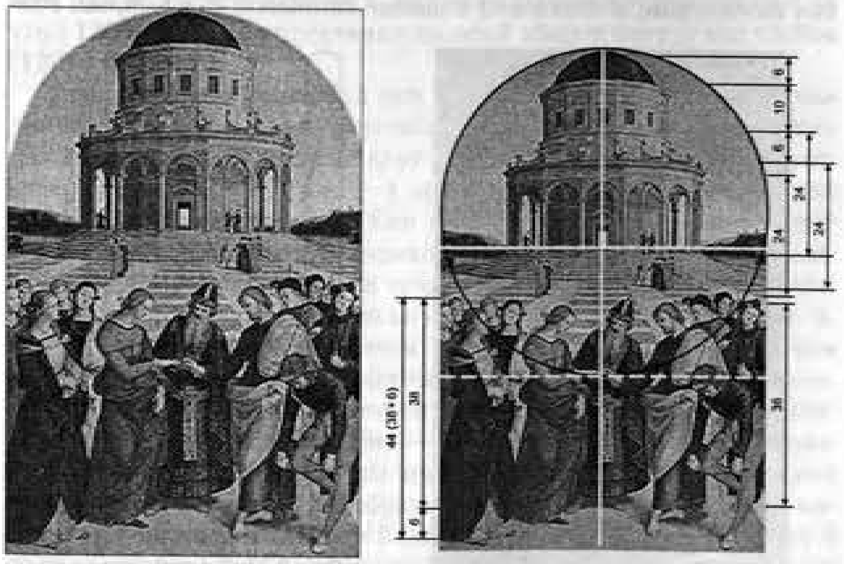


Рис. 2.21. Картина Рафаэля «Обручение Марии» и ее гармонический анализ

ниями, верхняя из которых совпадает с линией основания храма, а нижняя пересекается с *осью симметрии* в «точке обручения», что и является главной идеей картины. Таким образом, при композиционном построении своей картины Рафаэль использовал те же принципы, что и Леонардо да Винчи в своей картине «Джоконда», то есть принцип симметрии и закон Золотого сечения.

2.13. Вездесущий филлотаксис

Винтовая симметрия

Все в Природе подчинено строгим математическим законам. Оказывается, расположение листьев на стеблях также носит строгий математический характер, и это явление называется в ботанике *филлотаксисом*. Суть филлотаксиса состоит в винтовом расположении листьев на стебле растений, ветвей на деревьях, лепестков в соцветьях, семян в сосновой шишке и головке подсолнечника и т. д.). Это явление было известно еще Кеплеру, вызывало удивление и обсуждалось многими учеными, такими, как Леонардо да Винчи, Тьюринг, Вейль и другими.

В явлении филлотаксиса используются более сложные понятия симметрии, в частности понятие *винтовой симметрии*. Рассмотрим, например, расположение листьев на стебле растения, показанное на рис. 2.22 и рис. 19 на цветной вклейке. Мы видим, что листья находятся в различных местах стебля вдоль винтовой линии, который обвивается вокруг его поверхности. Для того чтобы перейти от нижележащего листа к следующему, приходится мысленно повернуть лист на некоторый угол вокруг вертикальной оси стебля, а затем поднять его на определенный отрезок вверх. В этом и состоит суть *винтовой симметрии*.

Рис. 2.22. Винтовая симметрия

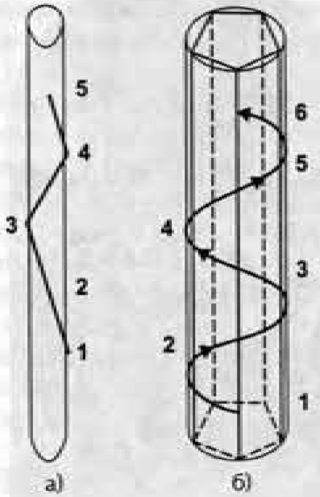


Рис. 2.23. Винтовые оси на стеблях растений

Рассмотрим характерные *винтовые оси симметрии*, которые возникают на стеблях растений (рис. 2.23 и рис. 20 на цветной вклейке). На рис. 2.23, *а* изображен стебель растения с винтовой осью симметрии третьего порядка. Проследим линию листорасположения на этом рисунке. Для того чтобы перейти от листа 1 к листу 2, следует повернуть лист 1 вокруг оси стебля на 120° против часовой стрелки (если смотреть снизу) и затем передвинуть листок 1 вдоль стебля по вертикали до тех пор, пока он не совместится с листком 2. Повторяя подобную операцию, то есть поворачивая лист 2 на 120° и передвигая его вверх, перейдем от листа 2 к листу 3, а затем к листу 4. Обратим внимание на то, что листок 4 лежит над листком 1 (как бы повторяет его, но этажом выше) и что, идя от листа 1 к листу 4, мы трижды совершили поворот на угол 120°, то есть осуществили полный оборот вокруг оси стебля ($120° \times 3 = 360°$).

Угол поворота винтовой оси у ботаников называется *углом расхождения листьев*. Вертикальная прямая, соединяющая два листа, расположенные друг над другом на стебле, именуется *ортостихой*. Отрезок 1–4 ортостихи соответствует полной трансляции винтовой оси. Как мы увидим далее, число оборотов вокруг оси стебля для перехода от нижнего листа к вышележащему, расположенному в точности над нижним (по ортостихе), может равняться не только единице, но и двум, трем и т. д. Это число оборотов называется *листовым циклом*. В ботанике принято характеризовать винтовое листорасположение с помощью дроби, числителем которой является число оборотов в листовом цикле, а знаменателем — число листьев в цикле. В рассмотренном нами случае мы имеем *винтовую ось симметрии* типа 1/3. На рис. 2.23, *б* изображена пятерная *винтовая ось симметрии* с листовым циклом 2 (для перехода от листа 1 к листу 6 надо совершить два полных оборота). Дробь, характеризующая данную ось, равна 2/5; угол расхождения листьев составляет

144° (360°/5 = 72°; 72° × 2 = 144°). Заметим, что существуют и более замысловатые оси, например, типа 3/8, 5/13 и т. д.

Возникает вопрос, какими могут быть числа m и n, характеризующие *винтовую ось симметрии типа* m/n. И вот здесь Природа преподносит нам очередной сюрприз в виде так называемого *закона филлотаксиса*.

Ботаники утверждают, что дроби, характеризующие винтовые оси растений, образуют строгую математическую последовательность следующего типа:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{3}{8}, \frac{5}{13}, \frac{8}{21}, \frac{13}{34}, \ldots \qquad (2.84)$$

Заметим, что дроби в последовательности (2.84) есть не что иное, как отношения чисел Фибоначчи, взятых через одно. Легко доказать, что последовательность (2.84) стремится к числу, обратному квадрату золотой пропорции $\tau^{-2} = 0{,}382$.

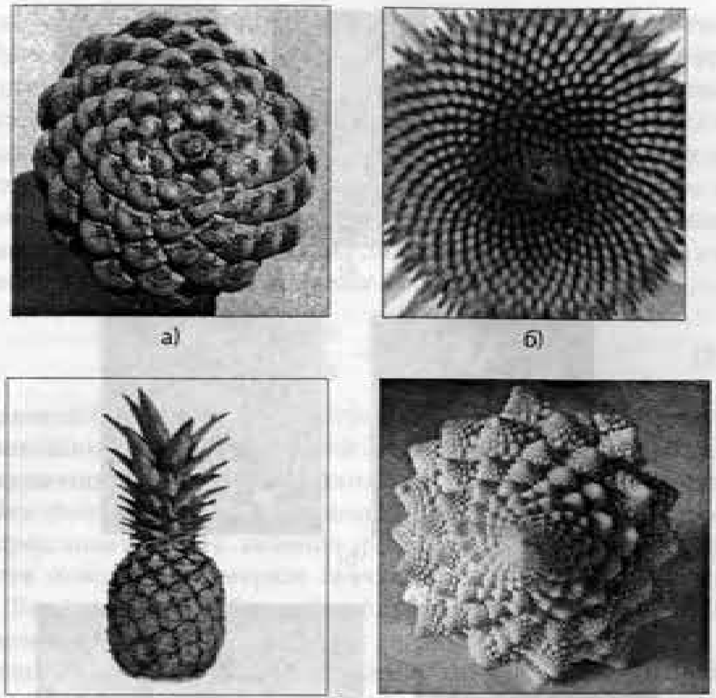
Ботаники установили, что для различных растений характерны свои дроби филлотаксиса из последовательности (2.84). Например, дробь 1/2 свойственна злакам, березе, винограду; 1/3 — осоке, тюльпану, ольхе; 2/5— груше, смородине, сливе; 3/8 — капусте, редьке, льну; 5/13 — ели, жасмину и т. д.

Какова же «физическая» причина, лежащая в основе «законов филлотаксиса»? Ответ очень прост. Оказывается, что именно при таком расположении листьев достигается максимум притока солнечной энергии к растению.

Плотноупакованные филлотаксисные структуры

Наиболее ярко явление филлотаксиса проявляется в соцветиях и плотно упакованных ботанических структурах, таких, как сосновые и кедровые шишки, ананасы, кактусы, головки подсолнечника и цветной капусты и многие другие.

На рис. 2.24 и рис. 21 на цветной вклейке изображены такие объекты (сосновая шишка, головка подсолнечника, ананас, головка цветной капусты), в которых *закон филлотаксиса* основывается на числовой последовательности (2.16), образуемой отношениями соседних чисел Фибоначчи. То есть в каждом из таких ботанических объектов семена или мелкие части объектов на их поверхности располагаются на пересечении левых и правых спиралей; при этом отношение числа левых и правых спиралей всегда



а) б) в) г)

Рис. 2.24. Филлотаксисные структуры: а) — сосновая шишка, б) — головка подсолнечника, в) — ананас, г) — головка цветной капусты

равно отношению соседних чисел ряда Фибоначчи (2.16), которое, как показано выше, в пределе стремится к золотой пропорции. Те же закономерности видны в корзинках цветов.

На рис. 2.25 и рис. 22 на цветной вклейке изображены геометрические модели филлотаксисных структур, которые дают образное представление об этом уникальном ботаническом явлении.

Таким образом, строгую математику мы находим и в расположении листьев на стеблях растений, лепестков на цветке розы, в разрезе яблока (пентакл), в спиралевидном расположении семян в сосновой шишке, головке подсолнечника, ананасе и кактусе. И эта закономерность математически выражается числами Фибоначчи и золотой пропорцией! И мы снова и снова убеждаемся в том, что все в природе подчинено единому плану,

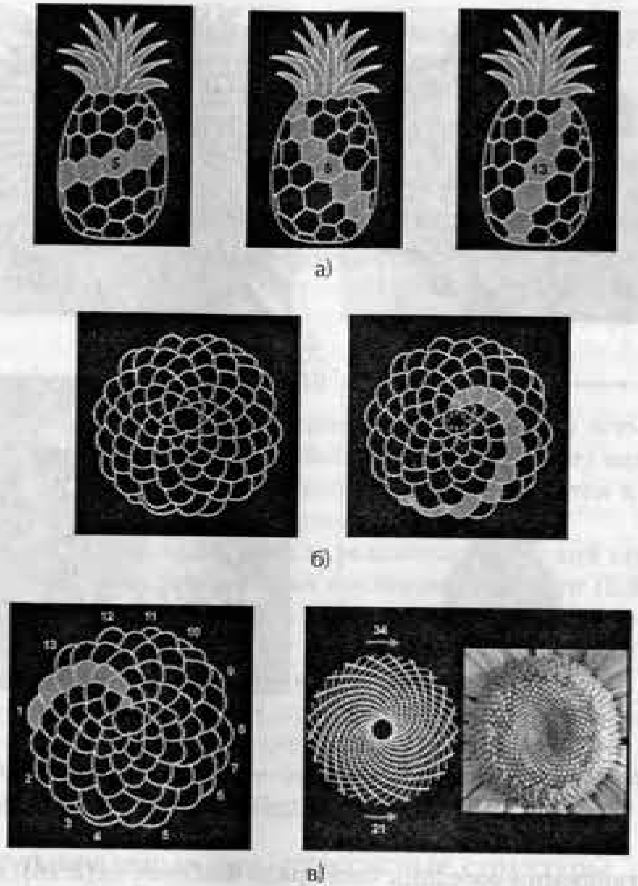


Рис. 2.25. Геометрические модели филлотаксисных структур: а) — ананас, б) — сосновая шишка, в) — головка подсолнечника

единому «закону Золотого сечения» — и раскрыть и объяснить этот фундаментальный закон природы во всех его проявлениях и есть главная задача науки.

Геометрия Боднара

Наблюдая филлотаксисные объекты в завершенном состоянии и наслаждаясь упорядоченным рисунком на его поверхности, мы всегда задаем себе вопрос: как в процессе роста на его поверхности формируется решетка Фибоначчи? Эта проблема и представляет собой одну из наиболее интригующих загадок филлотаксиса. Суть ее состоит в том, что у большинства видов биоформ в процессе роста происходит изменение числовых характеристик симметрии. Известно, например, что головки подсолнечника, находящиеся на разных уровнях одного и того же стебля, имеют разную симметрию: чем старше диск, тем выше порядок его симметрии. Это означает, что в процессе роста происходит закономерное изменение (возрастание) порядка симметрии и это изменение симметрии осуществляется по закону:

$$\frac{2}{1} \to \frac{3}{2} \to \frac{5}{3} \to \frac{8}{5} \to \frac{13}{8} \to \frac{21}{13} \to \ldots \qquad (2.85)$$

Изменение порядков симметрии филлотаксисных объектов в соответствии с (2.85) называется *динамической симметрией*. Все вышеуказанные данные и составляют существо хорошо известной *загадки филлотаксиса*. Ряд ученых, исследовавших эту проблему, предполагает, что явление филлотаксиса имеет фундаментальное междисциплинарное значение. В частности, по мнению В. И. Вернадского, проблема биологической симметрии является ключевой проблемой биологии.

Итак, явление динамической симметрии (2.85) обнаруживает свою особую роль в геометрической проблеме филлотаксиса. Напрашивается предположение, что за числовой закономерностью (2.85) кроются определенные геометрические законы, которые, возможно, и составляют суть секрета ростового механизма филлотаксиса. Их раскрытие имело бы важное значение для разрешения проблемы филлотаксиса в целом.

Упомянутая выше «загадка филлотаксиса» была решена украинским архитектором Олегом Боднаром. Свое научное открытие он описал в книге «Золотое сечение и неевклидова геометрия в природе и искусстве», опубликованной в 1994 году.

Теория Боднара удивительна. Она раскрывает «загадку филлотаксиса», то есть показывает, как в процессе непрерывного роста, например, сосновой шишки, на ее поверхности происходит смена «порядков филлотаксиса» по «закону Фибоначчи». Боднар первым начал исследовать явление филлотаксиса с позиций гиперболического подхода. В теории Боднара использовано понятие *гиперболического поворота*, которое является важнейшим преобразующим движением гиперболической геометрии.

Но для того, чтобы гиперболический подход приводил к спиралям Фибоначчи на поверхности шишки, Боднар вынужден был отказаться от классических гиперболических функций и ввести в рассмотрение так называемые золотые гиперболические функции, которые есть не что иное, как гиперболические функции Фибоначчи и Люка. Теория Боднара доказывает, что геометрия живой природы является гиперболической, основанной на гиперболических функциях Фибоначчи и Люка. Своей теорией Боднар доказал гипотезу Вернадского о гиперболическом характере живой природы — и в этом состоит главный итог открытия Олега Боднара.

Книги профессора Стахова по гиперболическим функциям Фибоначчи и Люка

В 2003 году профессор Стахов опубликовал небольшим тиражом две книги по гиперболическим функциям Фибоначчи и Люка — на русском и английском языках. Книга на русском языке называлась «Новая математика для живой природы», эта же книга на английском языке называлась *Hyperbolic Fibonacci and Lucas functions*. Предисловие к данным книгам написано академиком Ю. А. Митропольским. В этом предисловии знаменитый математик написал следующее:

> «Представляемая книга является частью обширного плана математических исследований по обновлению современной науки, выполняемого профессором Стаховым в течение многих десятилетий. Впервые я познакомился с гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка в 1993 году, когда мне на рецензию была представлена статья «Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи», представленная А. П. Стаховым и И. С. Ткаченко для публикации в журнале «Доклады Академии наук Украины». Статья меня заинтересовала, и согласно моей рекомендации она была опубликована в одном из номеров журнала за 1993 год. Введенные Стаховым и Ткаченко новые классы элементарных функций могут стать важным событием в современной науке и математике, если при этом учесть особую роль, которую играют гиперболические функции в развитии математики и физики («гиперболическая геометрия Лобачевского», «четырехмерный мир Минковского» и т. д.).
>
> Прежде всего, новые гиперболические функции представляют интерес с математической точки зрения. Они являются расширением известных формул Бине для чисел Фибоначчи и Люка на непрерывную область. Первый неожиданный результат, вытекающий из такого подхода, состоит в переосмысливании «теории чисел Фибоначчи», активно развиваемой математиками-фибоначчистами в последние десятилетия. Благодаря гиперболическим функциям Фибоначчи и Люка «теория чисел Фибоначчи», которая до сих пор развивалась как «дискретная теория», превращается в «непрерывную теорию», значительно более богатую по своему содержанию, потому что гиперболические функции Фибоначчи и Люка являются значительно более сложным математическим объектом, чем числа Фибоначчи и Люка, которые являются лишь вырожденным случаем нового класса гиперболических функций.
>
> Но особый интерес к гиперболическим функциям Фибоначчи и Люка возникает еще и потому, что эти функции были блестяще использованы украинским ученым и архитектором Олегом Боднаром в созданной им новой теории филлотаксиса. Кстати, статья Боднара на эту тему по моей рекомендации опубликована в том же журнале «Доклады Академии наук Украины» в 1992 году. Исследования Боднара показывают, что гиперболические функции Фибоначчи и Люка (названные Боднаром «золотыми» гиперболическими функциями) отражают некоторые глубокие закономерности, существующие в живой природе, и поэтому они могут стать весьма эффективным средством для моделирования процессов в живой природе.
>
> Несмотря на строго математический характер книги профессора Стахова, необходимо отметить, что она написана популярно, с большим педагогическим мастерством и в каком-то смысле может выступать в качестве «букваря» по числам Фибоначчи и Золотому сечению, что чрезвычайно актуально для школ и университетов, как Украины, так и России и других стран. И поэтому издание книги необходимо и полезно не только с научной и математической точки зрения, но и с педагогической точки зрения. Мне кажется, что ее с удовольствием прочтут не только школьные учителя математики, школьники старших классов и студенты университетов, но также многие ученые и исследователи, которые интересуются историей науки и математики, а также приложениями чисел Фибоначчи и Золотого сечения в своих предметных областях.
>
> И последнее замечание, касающееся названия нового класса гиперболических функций. Великие математики Фибоначчи и Люка, которые ввели в рассмотрение числа Фибоначчи и Люка, строго говоря, никакого отношения к этим функциям не имеют. И мне кажется, что наука (и особенно украинская математика) только выиграли бы, если бы эти функции были названы гиперболическими функциями Стахова и Ткаченко, то есть названы именами тех украинских ученых, которым принадлежит честь введения в математику нового класса функций. То же самое касается и новой геометрической теории филлотаксиса, созданной украинским ученым Олегом Боднаром. Мы имеем полное право назвать новую теорию филлотаксиса «геометрией Боднара».
>
> Я не сомневаюсь, что книга профессора Стахова будет воспринята мировой научной общественностью с большим интересом, а научные ре-

зультаты, изложенные в настоящей книге, могут открыть новые пути в математическом исследовании Природы».

Использование филлотаксисных решеток в живописи

Выше мы рассказывали о широком использовании золотого прямоугольника и других золотых геометрических фигур (пентакла, золотого равнобедренного треугольника и других) в произведениях живописи. А теперь мы расскажем еще об одном композиционном приеме, которым широко пользовались художники эпохи Возрождения. Речь идет об использовании *филлотаксисных* растровых решеток. Выше мы рассказали об удивительном ботаническом явлении — *филлотаксисе*, в соответствии с которым природа конструирует сосновые шишки, ананасы, головки подсолнечника, кактусы и многие другие ботанические структуры.

В соответствии с законами филлотаксиса ареалы (скопления колючек) кактуса располагаются по спиралям, причем число левых и правых спиралей для кактуса являются соседними числами Фибоначчи 21 и 34. Если теперь посмотреть на тот же кактус со стороны (рис. 2.26), то обнаруживается, что спирали на сравнительно небольшом участке поверхности выглядят как прямые линии, идущие по диагонали сверху вниз и слева направо или снизу вверх и справа налево. На фотографии (рис. 2.26) хорошо видно, что прямые, идущие в правом направлении, имеют меньший наклон, чем прямые, идущие в левом направлении. При

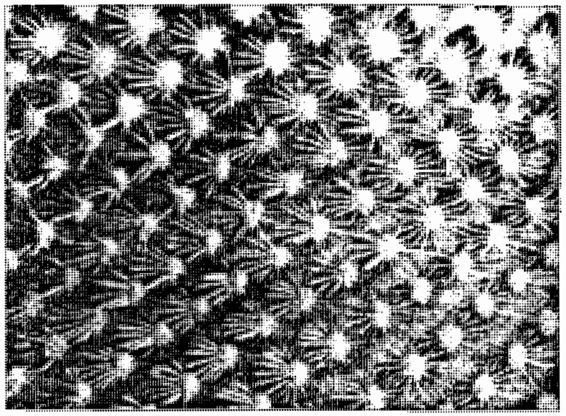


Рис. 2.26. Ареалы кактуса

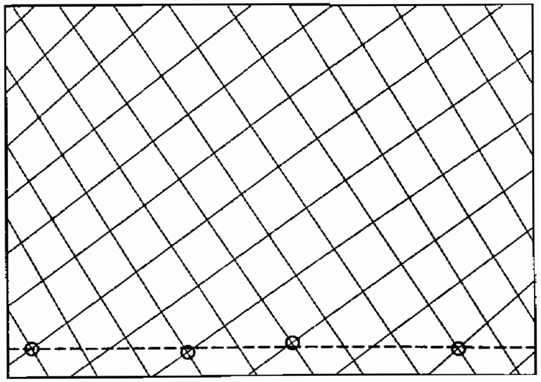


Рис. 2.27. Филлотаксисная растровая решетка

этом число правых и левых диагоналей связаны зависимостью Фибоначчи. Действительно, на фотографии отчетливо видно, что вначале примерно на 2 диагонали с правым наклоном приходится 3 диагонали с левым наклоном (2/3), затем на 3 правых диагонали 5 левых (3/5) и т. д.

Геометрическая модель участка кактуса, рассмотренного на фотографии (рис. 2.26), представлена ниже в виде растровой сетки (рис. 2.27), в которой наклонные линии (с правым и левым наклоном) моделируют принцип расположения ареалов на поверхности кактуса. Если теперь представить развертку поверхности всего кактуса на плоскости, то мы получим подобную растровую сетку, в которой имеется 21 диагональ с правым наклоном и 34 диагонали с левым наклоном. Созданная таким образом сеть линий (*филлотаксисная* растровая решетка) оказывается в эстетическом отношении столь же оптимальной, как и прямоугольник, построенный по принципу Золотого сечения. Комплекс линий, имеющих вполне определенный и в то же время различный наклон, придает полю изображения эмоциональное внутреннее напряжение и одновременно строгую уравновешенность. Эти принципы композиционного построения художественного произведения присущи многим полотнам старых мастеров живописи.

Австрийский ученый Ф. Патури, автор замечательной книги «Растения — гениальные инженеры природы», провел анализ использования растровых решеток в произведениях великих художников.

Рис. 2.28. *Тициан*. Вакх и Ариадна

Ф. Патури наложил растровую сетку на репродукцию картины Тициана «Вакх и Ариадна» (рис. 2.28 и рис. 23 на цветной вклейке) и пришел к следующему заключению:

«Все основные линии перспективы совпадают с растром. Даже множество второстепенных для сюжета деталей и форм художник поместил в то поле внутреннего напряжения, на котором и построена картина. Обратите внимание на виднеющийся на горизонте небольшой холм в правой стороне полотна рядом с церковной колокольней, на ветви большого дерева, на очертание кучевого облака, лежащего под созвездием, на задние лапы и линию живота крупной дикой кошки, на направление оси перекинутой вазы, на воздетую правую руку сатира в венке из виноградных лоз в правом углу холста и, наконец, на поднятую ногу лошади.

Тому, кто посчитает это делом случая или полагает, что картина Тициана является исключением, мы рекомендуем перенести растровую сетку на прозрачную бумагу и затем наложить ее на репродукции некоторых художественных полотен. Он будет изумлен тем, насколько часто композиции картин станут повторять динамику Золотого сечения вплоть до ее зеркального отражения». Такие произведения, как «Ливийская сивилла» Микеланджело, «Поклонение пастухов» Тинторетто, «Мадонна с длинной шеей» Пармиджанино, «Азия» Тьеполо (зеркальное отражение!), «Вакханалия» Пуссена, «Драка крестьян при игре в карты» Брауэра или «праздник любви» Ватто (зеркальное отражение!), — это немногие примеры, которые лишь подтверждают общую закономерность».

И далее Патури делает следующее важное заключение:

«Во все времена художники, осознанно или неосознанно, учились постигать законы эстетического восприятия, наблюдая природу. Живописцев всегда пленяла простая и одновременно рациональная геометрия форм биологического роста».

2.14. «Фибоначчиевы» резонансы генетического кода

Исходные данные о генетическом коде

Среди понятий биологии, хорошо формализованных и имеющих уровень общенаучной значимости, генетический код занимает особое место. Воспользуемся данными о генетическом коде, приведенными в книге «Бипериодическая таблица генетического кода и число протонов» (2001), написанной известным русским ученым, доктором физико-математических наук профессором С. В. Петуховым, работающим на стыке биологии и математики.

Установление наукой ныне широко известного факта поразительной простоты основных принципов кодирования наследственной информации в живых организмах относится к числу важнейших открытий человечества. Эта простота заключается в том, что наследственная информация кодируется текстами из трехбуквенных слов — *триплетов*, или *кодонов*, составленных на базе алфавита из четырех букв — азотистых оснований A (аденин), C (цитозин), G (гуанин), T (тимин). Данная система записи, по существу, едина для всего необозримого множества разнообразных живых организмов и называется *генетическим кодом*.

Хранителем триплетов генетического кода является всем известная *двойная спираль* Уотсона–Крика, представляющая собой молекулу ДНК, состоящую из двух взаимосвязанных параллельных цепей. Стандартизованные звенья этих цепей называются *нуклеотидами*. Вдоль каждой из цепей расставлены — по одному на каждый нуклеотид — указанные выше азотистые основания A, C, G и T. При этом для двух цепей ДНК выполняется так называемое *условие комплементарности*:

против основания A в одной цепи всегда стоит T в другой цепи, а против основания G всегда стоит C.

С помощью трехбуквенных триплетов или кодонов осуществляется кодирование 20 аминокислот. Различных комбинаций по три основания из четырех существует $4^3 = 64$. В этой связи некоторые из 20 видов аминокислот кодируются сразу несколькими триплетами. Это называется *вырожденностью генетического кода*. Нахождение соответствия между триплетами и аминокислотами (или знаками пунктуации для считывания) обычно трактуется как *расшифровка генетического кода*.

Рибонуклеиновая кислота (РНК) выполняет роль «посредника» в синтезе белков из аминокислот 20 видов в соответствии с последовательностью триплетов в цепях ДНК. Известным отличием РНК от ДНК является то, что стандартный набор азотистых оснований ее триплетов содержит вместо тимина (T) очень сходный и родственный с ним урацил (U), а потому четырехбуквенный кодовый алфавит у РНК состоит из набора A, C, G, U.

Азотистые основания в ДНК и РНК относятся к двум различным химическим классам — *пиримидиновому* и *пуриновому*. *Пиримидиновыми* основаниями являются цитозин C и урацил U (или тимин T), а *пуриновыми* — аденин A и гуанин G. Под действием азотистой кислоты наблюдаются закономерные мутации РНК, связанные с заменой оснований: A → G, C → U. Таким образом, основания A и C являются *изменяющимися*, а G и U — *неизменяющимися*.

Белки, или *протеины*, — это основной плотный компонент живого организма. Каждый из белков выполняет только свою, свойственную ему функцию. Белки представляют собой крупные полимерные молекулы, состоящие из цепей аминокислот (*полипептидов*), нерегулярно чередующихся. Все аминокислоты в белках соединены друг с другом однотипной химической связью, получившей название *пептидной связи*. Молекулу белка часто сравнивают с поездом, состоящим из вагонов двадцати различных видов, которые сцеплены друг с другом одним и тем же способом, позволяющим соединять вагоны в любом порядке.

ДНК SUPRA-код (открытие Жан-Клода Переса)

А теперь расскажем об одном научном открытии, устанавливающим связь генетического кода с числами Фибоначчи и Золотым сечением. В 1990 году французский исследователь Жан-Клод Перес (*Jean-Claude Perez*), работавший в тот период научным сотрудником фирмы *IBM*, сделал весьма неожиданное открытие в области генетического кодирования. Он открыл математический закон, управляющий самоорганизацией оснований *T, C, A, G* внутри ДНК. Он обнаружил, что последовательные множества нуклеотидов ДНК организованы в структуры дальнего порядка, называемые *резонансами*. Резонанс представляет особую пропорцию, обеспечивающую разделение ДНК в соответствии с числами Фибоначчи (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...).

Ключевая идея открытия Переса, назвавшего *ДНК SUPRA-кодом*, состоит в следующем. Рассмотрим любой отрезок генетического кода, состоящий из базисов типа *T, C, A, G*, и пусть длина этого отрезка равна числу Фибоначчи, например 144. Если число оснований типа *T* в рассматриваемом отрезке ДНК равно 55 (число Фибоначчи) и суммарное число оснований типа *A, C* и *G* равно 89 (число Фибоначчи), то рассматриваемый отрезок генетического кода образует *резонанс*, то есть *резонанс* есть пропорция между тремя соседними числами Фибоначчи (55, 89, 144). Открытие состоит в том, что каждая ДНК образует множество *резонансов* рассмотренного вида, то есть, как правило, отрезки генетического кода длиной, равной числу Фибоначчи F_n, разбиваются Золотым сечением на множество оснований типа *T* (число которых в рассматриваемом отрезке генетического кода равно F_{n-2}) и суммарное множество остальных оснований (число которых равно F_{n-1}). Если произвести систематическое исследование всех возможных отрезков генетического кода Фибоначчи, тогда получим некоторое множество *резонансов*, называемое *SUPRA-кодом ДНК*.

Начиная с 1990 года указанная закономерность была многократно проверена и подтверждена многими выдающимися биологами, исследовавшими, в частности, ДНК вируса СПИД.

Несомненно, рассматриваемое открытие относится к разряду выдающихся в области ДНК, определяющих развитие генной инженерии. По мнению автора открытия, Жан-Клода Переса, **SUPRA-код ДНК является универсальным биоматематическим законом, который указывает на высочайший уровень самоорганизации нуклеотидов в ДНК согласно принципу Золотого сечения.**

Проверка закона Переса

В упомянутой книге С. В. Петухова на с. 165–166 приведены последовательности триплетов в синтетических генах для α- и β-цепей инсулина. Последовательность для такой β-цепи показана на рис. 2.29.

Заметим, что все основания типа T в указанной последовательности отмечены серым цветом.

ATG-TTG-GTC-AAT-CAG-CAC-CTT-TGT-GGT-TCT-CAC-CTC-GTT-GAA-GCT-TTG-TAC-
CTT-GTT-TGC-GGT-GAA-CGT-GGT-TTC-TTC-TAC-ACT-CCT-AAG-ACT

Рис. 2.29. Генетический код инсулина

Проверка *закона Переса* на примере β-цепи молекулы инсулина (рис. 2.29) привела к следующему результату. Общее число триплетов в β-цепи равно 30, то есть молекула содержит 90 оснований (89 — ближайшее число Фибоначчи). Если подсчитать число оснований Т в β-цепи, то оно равно 34 (34 — число Фибоначчи), а число остальных оснований равно 90 – 34 = 56 (55 — ближайшее число Фибоначчи). Таким образом, между основанием T и остальными основаниями в β-цепи соблюдается следующая пропорция: 90 : 56 : 34. Эта пропорция очень близка к *резонансу*: 89 : 55 : 34. Из этого анализа вытекает, что закон Переса для β-цепи инсулина выполняется с весьма высокой для практики точностью.

Если теперь взять первые 18 триплетов β-цепи, содержащих 54 основания (55 — ближайшее число Фибоначчи) и подсчитать число оснований T на этом отрезке, то оно равно 22 (21 — ближайшее число Фибоначчи), то есть в первом отрезке мы имеем пропорцию 54 : 32 : 22, что также близко к *резонансу*: 55 : 34 : 21, то есть закон Переса на этом отрезке также выполняется с достаточной точностью. Если взять отрезок, состоящий из оставшихся 12 триплетов (36 оснований), то число оснований T на этом отрезке равно 12 (13 — ближайшее число Фибоначчи), то есть имеем пропорцию: 36 : 24 : 12, которая является приближением к *резонансу* 34 : 21 : 13. Таким образом, как для β-цепи молекулы инсулина в целом, так и для ее отрезков закон Переса выполняется с достаточной для практики точностью. Можно также увидеть, что практически в любом отрезке β-цепи тенденция к Золотому сечению сохраняется.

Удивительное открытие Жан-Клода Переса позволяет сделать интересный вывод, касающийся аналогии между музыкой, поэзией, рыночными процессами («волнами Эллиотта») и генетическим

кодом. Несомненным является тот факт, что гармония этюдов Шопена, стихов Пушкина или «волн Элиотта», в которых Золотое сечение наблюдается многократно, сходна с «гармонией» генетического кода, в котором «резонансы Фибоначчи», лежащие в основе *ДНК SUPRA-кода*, многократно наблюдаются как во всей молекуле ДНК, так и в каждой ее части.

2.15. Музыка стихов

Исследования Розенова

Выше (раздел 1.16) мы установили, что многие музыкальные произведения основаны на принципе Золотого сечения. Многое в структуре поэтических произведений роднит этот вид искусства с музыкой. Четкий ритм, закономерное чередование ударных и безударных слогов, упорядоченная размерность стихотворений, их эмоциональная насыщенность делают поэзию родной сестрой музыкальных произведений. Каждый стих обладает своей музыкальной формой — своей ритмикой и мелодией. Можно ожидать, что в строении стихотворений проявятся некоторые черты музыкальных произведений, закономерности музыкальной гармонии, а следовательно, и золотая пропорция.

Если музыка — гармоническое упорядочение звуков, то поэзия — гармоническое упорядочение речи. Математический анализ ритмики стихотворных произведений имеет давнюю традицию, идущую от российского искусствоведа XIX столетия Э. Розенова, писателя А. Белого и других. Анализируя многие поэтические произведения М. Ю. Лермонтова, И. Ф. Шиллера, А. К. Толстого и других писателей, Розенов установил, что во многих случаях построение формы произведений подчиняется закону Золотого сечения. При этом он подчеркивает:

> «Мы не имеем права даже подозревать [авторов этих произведений] в сухом и кропотливом вычислении числовых соотношений для руководства ими во время процесса создания. В этих случаях нам остается прибегнуть к единственному выводу, что обнаруженная числовая закономерность является материальным выражением психической закономерности и результатом безотчетной потребности автора, то есть его бессознательного подчинения законам природного творчества».

Золотое сечение в поэзии в первую очередь проявляется как наличие определенного момента стихотворения (кульминации,

Александр Сергеевич Пушкин

смыслового перелома, главной мысли произведения) в строке, приходящейся на точку деления общего числа строк стихотворения в золотой пропорции. Так, если стихотворение содержит 100 строк, то первая точка Золотого сечения приходится на 62-ю строку (62 %), вторая — на 38-ю (38 %) и т. д.

Большое внимание математическому «стиховедению» уделял выдающийся российский математик А. Н. Колмогоров и его ученики. В настоящее время в российской науке одним из признанных лидеров в этой области является Олег Гринбаум, доктор филологических наук, профессор кафедры математической лингвистики филологического факультета Санкт-Петербургского государственного университета.

Золотое сечение в поэзии А. С. Пушкина

Начнем с величины стихотворения, то есть количества строк в нем. Казалось бы, этот параметр стихотворения может изменяться произвольно. Однако оказалось, что это не так. Например, проведенный Н. Васютинским анализ стихотворений А. С. Пушкина с этой точки зрения показал, что размеры стихов распределены весьма неравномерно; оказалось, что Пушкин явно предпочитает размеры в 5, 8, 13, 21 и 34 строк (числа Фибоначчи).

Многими исследователями было замечено, что стихотворения подобны музыкальным произведениям; в них также существуют кульминационные пункты, которые делят стихотворение в пропорции Золотого сечения. Рассмотрим, например, стихотворение А. С. Пушкина «Сапожник»:

Картину раз высматривал сапожник
И в обуви ошибку указал;
Взяв тотчас кисть, исправился художник,
Вот, подбочась, сапожник продолжал:
«Мне кажется, лицо немного криво...
А эта грудь не слишком ли нага?»
Тут Апеллес прервал нетерпеливо:

«Суди, дружок, не выше сапога!»
Есть у меня приятель на примете:
Не ведаю, в каком бы он предмете
Был знатоком, хоть строг он на словах,
Но черт его несет судить о свете:
Попробуй он судить о сапогах!

Проведем анализ этой притчи. Стихотворение состоит из 13 строк. В нем выделяется две смысловые части: первая в 8 строк и вторая (мораль притчи) в 5 строк (13, 8, 5 — числа Фибоначчи).

Одно из последних стихотворений Пушкина «Не дорого ценю я громкие права...» («Из Пиндемонти»). Структура этого знаменитого стихотворения, которое не потеряло своей актуальности и сегодня, построена на числах Фибоначчи: 2, 3, 5, 8, 13, 21, отчего закон Золотого сечения выполняется в нем с высокой точностью. Стихотворение состоит из 21 строки, и в нем выделяются две смысловые части в 13 и 8 строк; кульминацией является слово «никому», разделяющее две смысловые части.

Не дорого ценю я громкие права,
От коих не одна кружится голова.
Я не ропщу о том, что отказали боги
Мне в сладкой участи оспаривать налоги
Или мешать царям друг с другом воевать;
И мало горя мне, свободно ли печать
Морочит олухов, иль чуткая цензура
В журнальных замыслах стесняет балагура.
Все это, видите ль, слова, слова, слова.
Иные, лучшие, мне дороги права;
Иная, лучшая, потребна мне свобода:
Зависеть от царя, зависеть от народа —
Не все ли нам равно? Бог с ними.
Никому отчета не давать, себе лишь самому
Служить и угождать; для власти, для ливреи
Не гнуть ни совести, ни помыслов, ни шеи;
По прихоти своей скитаться здесь и там,
Дивясь божественным природы красотам,
И пред созданьями искусств и вдохновенья
Трепеща радостно в восторгах умиленья,
Вот счастье! Вот права...

Характерно, что и первая часть этого стиха (13 строк) по смысловому содержанию делится на 8 и 5 строк, то есть все стихотворение построено по законам золотой пропорции.

Представляет несомненный интерес анализ романа «Евгений Онегин», сделанный Н. Васютинским. Этот роман состоит из 8 глав, в каждой из них в среднем около 50 стихов. Наиболее совершенной, наиболее отточенной и эмоционально насыщенной является восьмая глава. В ней 51 стих. Вместе с письмом Евгения к Татьяне (60 строк) это точно соответствует числу Фибоначчи 55!

Н. Васютинский констатирует:

> «Кульминацией главы является объяснение Евгения в любви к Татьяне — строка «Бледнеть и гаснуть... вот блаженство!». Эта строка делит всю восьмую главу на две части — в первой 477 строк, а во второй — 295 строк. Их отношение равно 1,617! Тончайшее соответствие величине золотой пропорции! Это великое чудо гармонии, совершенное гением Пушкина!»

Числа Фибоначчи в поэзии М. Ю. Лермонтова

Русский исследователь Розенов, которого мы упоминали выше, провел анализ некоторых поэтических произведений М. Ю. Лермонтова и обнаружил в них Золотое сечение.

Знаменитое стихотворение Лермонтова «Бородино» делится на две части: вступление, обращенное к рассказчику и занимающее лишь одну строфу («Скажи-ка, дядя, ведь недаром...»), и главную часть, представляющую самостоятельное целое, которое распадается на две равноправные части. В первой из них описывается с нарастающим напряжением ожидание боя, во второй — сам бой с постепенным снижением напряжения к концу стихотворения. Граница между этими частями является кульминационной точкой произведения и приходится как раз на точку деления его Золотым сечением.

Михаил Юрьевич Лермонтов

Главная часть стихотворения состоит из 13 семистиший, то есть из 91 строки. Разделив ее Золотым сечением ($91:1{,}618 = 56{,}238$), убеждаемся, что точка деления находится в начале 57-го стиха, где стоит короткая фраза: «Ну ж был денек!» Именно эта фраза представляет собой «кульминационный пункт возбужденного ожидания», завершающего первую часть стихотворения (ожидание боя) и открывающий вторую его часть (описание боя).

Таким образом, Золотое сечение играет в поэзии весьма важную роль, выделяя кульминационный пункт стихотворения.

Шота Руставели

Числа Фибоначчи в поэзии Шота Руставели

Многие исследователи поэмы Шота Руставели «Витязь в тигровой шкуре» отмечают исключительную гармоничность и мелодичность его стиха.

Эти свойства поэмы грузинский ученый академик Г. В. Церетели относит за счет сознательного использования поэтом чисел Фибоначчи и Золотого сечения как в формировании формы поэмы, так и в построении ее стихов.

Поэма Руставели состоит из 1587 строф, каждая их которых состоит из четырех строк. Каждая строка состоит из 16 слогов и делится на две равные части по 8 слогов в каждом полустишии. Все полустишия делятся на два сегмента двух видов: А — полустишие с равными сегментами и четным количеством слогов (4 + 4); В — полустишие с несимметричным делением на две неравные части (5 + 3 или 3 + 5). Таким образом, в полустишии В получаются соотношения $3:5:8$, что является приближением к золотой пропорции.

Установлено, что в поэме Руставели из 1587 строф больше половины (863) построены по принципу Золотого сечения.

Золотое сечение в кинокартине «Броненосец "Потемкин"»

В наше время родился новый вид искусства — кино, — вобравший в себя драматургию действия, живопись, музыку. В выдающихся произведениях киноискусства правомерно искать проявления Золотого сечения. Первым это сделал создатель шедевра мирового кино «Броненосец "Потемкин"» кинорежиссер Сергей Эйзенштейн. В построении этой картины он сумел воплотить основной принцип гармонии — Золотое сечение. Как отмечает сам

Эйзенштейн, красный флаг на мачте восставшего броненосца (точка апогея фильма) взвивается в точке золотой пропорции, отсчитываемой от конца фильма.

2.16. Проблема выбора, или Умрет ли буриданов осел?

Академик Я. Б. Зельдович писал в одной из своих работ:

> «Не относитесь с презрением к "простым" соображениям. Высшей похвалы заслуживают именно те исследователи, которые из простых, но твердо установленных фактов извлекают глубокие выводы».

Работы американского психолога Владимира Лефевра отличаются как раз этой самой «простотой» исходных соображений или, точнее, исходных моделей, что придает им особую эстетическую прелесть.

Притча о буридановом осле

Часто приходится слышать о том, что существует масса замечательных возможностей, из которых надо выбрать лучшую, что приводит к весьма неожиданному последствию: радость выбора внезапно превращается в проблему, и эта проблема может быть очень и очень серьезной. Эта проблема известна уже пару тысячелетий. Например, греческий философ Аристотель в одном из своих сочинений рассказывал о человеке, испытывающем голод и жажду, который находится на равном расстоянии от пищи и питья и пребывает в покое. Более точно эту проблему, когда бедный человек не знает, что же ему все-таки сделать — то ли съесть, то ли выпить, — сформулировал французский философ *Жан Буридан*, который доказывал отсутствие свободы воли, а в доказательство привел пример про осла, который, находясь между двумя равными стогами сена на одинаковом расстоянии, должен непременно умереть от голода, так как не находит мотива, с какого же стога ему начинать есть. С тех пор и появилось крылатое выражение — *буриданов осел*. Так называют человека, нерешительного в выборе или колеблющегося между двумя равноценными возможностями.

Об одном психологическом эксперименте

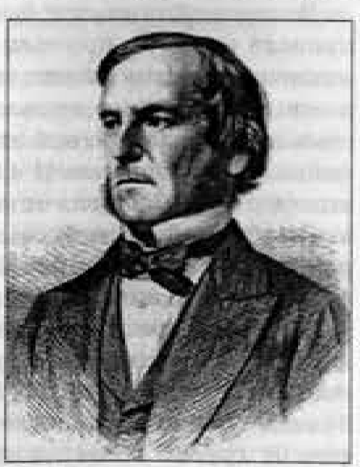
Мы очень привыкли к мысли, что, подбрасывая многократно монету, неизбежно получим в 50 % случаев «герб», а в 50 % —

«решку». Американский психолог Владимир Лефевр задумался: а можно ли эту уверенность переносить в психологию? Для этого он провел следующий эксперимент. Испытуемым предлагалось разделить кучку фасоли на две кучки, в одной из которых находятся «хорошие» фасолины, а в другой — «плохие», причем все фасолины очень похожи друг на друга и никаких объективных критериев для разделения вроде бы нет. Казалось бы, в этой ситуации испытуемые должны были бы разделить фасолины примерно поровну, однако реальный результат разрушил все ожидания: число «хороших» фасолин устойчиво составляет 62 % (0,62) от общего числа фасолин. Но ведь 62 % — это Золотое сечение от 100 %! То есть результат психологического эксперимента весьма удивительный: испытуемые делили фасоль на две кучки с числом фасолин, которые находятся в золотой пропорции! Владимир Лефевр задумался над результатом эксперимента и предложил оригинальную теорию для его логического объяснения. Но для понимания теории Лефевра нам необходимо знать некоторые базисные понятия математической логики и психологии.

Что такое импликация?

Имя английского математика Джорджа Буля (1816–1864) широко известно в современной науке.

В 1854 году он опубликовал работу «Исследование законов мышления, базирующихся на математической логике и теории вероятностей». Его работы 1847 и 1854 годов положили начало алгебре логики, или булевой алгебре. Буль первым показал, что существует аналогия между алгебраическими и логическими действиями, так как и те и другие предполагают лишь два варианта ответов — истина или ложь, нуль или единица. Он придумал систему обозначений и правил, пользуясь которыми можно было закодировать любые высказывания, а затем манипулировать ими как обычными числами. Булева алгебра располагает тремя основными операциями — И, ИЛИ,



Джордж Буль (1815–1864)

НЕ, которые позволяют производить логическое сложение, вычитание, умножение и сравнение символов и чисел.

В своей работе «Законы мышления» (1854) Буль окончательно сформулировал основы математической логики. Однако, как это часто бывает с математиками, сам Буль не видел путей практического приложения своих исследований. В одной из своих работ он писал, что не видит применения своих идей на практике, но успокаивал себя тем, что если его изыскания и не принесут пользы, то и вреда они также не принесут. Относительно полезности своих работ замечательный математик, к счастью, ошибся. Современная наука, в частности компьютерная наука, невозможна без булевой логики, которая широко используется при анализе и синтезе цифровых автоматов, а также при решении логических задач на компьютерах.

Основой булевой алгебры являются *высказывания* и связывающие их *булевы функции*. Под высказыванием понимается любое утверждение, которое оценивается с точки зрения его истинности или ложности. В качестве примера рассмотрим два высказывания — A и B:

A: *«Джордж Буль — создатель алгебры логики».*
B: *«$2 \times 2 = 5$».*

Первое из этих высказываний истинно, то есть $A = 1$, второе высказывание ложно, то есть $B = 0$.

Высказывания могут быть *простыми* и *сложными*. Выше мы привели примеры простых высказываний, основным свойством которых является то, что они могут быть либо истинными, либо ложными. Сложное высказывание состоит из нескольких простых высказываний, при этом оно тоже всегда является либо истинным, либо ложным (1 и 0). Но значение истинности сложного высказывания зависит от значений истинности входящих в них высказываний, то есть сложное высказывание Y — это некоторая логическая функция (булева функция) от входящих в него простых высказываний (например, A и B), то есть $Y = f(A, B)$.

Наиболее распространенными элементарными булевыми функциями являются: *отрицание, конъюнкция (функция И), дизъюнкция (функция ИЛИ), сложение по модулю 2* и т. д. Эти булевы функции наиболее широко используются в компьютерах. В других областях знаний используются другие булевы функции. Например, в психологии широко используется *импликация*. Импликация (от лат. *implico* — тесно связываю) — это логическая операция, образующая сложное высказывание из двух высказываний посредством логической связки, соответствующей союзу *если... то*. В импликативном высказывании различают *антецедент* — высказывание, которому предпослано слово *если*, и *консеквент* — высказывание, следующее за словом *то*.

Если A и B — простые высказывания (*антецедент* и *консеквент* соответственно), то под *импликацией* понимается булева функция $Y = A \to B$, которая ложна (0) лишь в случае истинности (1) *антецедента* и ложности (0) *консеквента* и истинна (1) во всех остальных случаях. Импликация может быть представлена с помощью следующей *таблицы истинности.*

Таблица 2.10. Таблица истинности функции «импликация»

A	0	0	1	1
B	0	1	0	1
Y	1	1	0	1

Какой «физический смысл» имеет импликация? Каким образом импликация связывает два элементарных высказывания? Покажем это на примере высказываний: *«данный четырехугольник — квадрат»* (A) и *«вокруг данного четырехугольника можно описать окружность»* (B). Рассмотрим составное высказывание $A \to B$, понимаемое как *«если данный четырехугольник квадрат, то вокруг него можно описать окружность»*. Есть **три варианта,** когда высказывание $A \to B$ истинно:

1. A истинно и B истинно, то есть данный четырехугольник квадрат, и вокруг него можно описать окружность;

2. A ложно и B истинно, то есть данный четырехугольник не является квадратом, но вокруг него можно описать окружность (разумеется, это справедливо не для всякого четырехугольника);

3. A ложно и B ложно, то есть данный четырехугольник не является квадратом, и вокруг него нельзя описать окружность.

Ложен только один вариант, когда А истинно, а В ложно, то есть данный четырехугольник является квадратом, но вокруг него нельзя описать окружность.

В обычной речи связка «если... то...» описывает причинно-следственную связь между высказываниями. Но в логических операциях смысл высказываний не учитывается. Рассматривается только их истинность или ложность, поэтому не надо смущаться «бессмысленностью» импликаций, образованных высказываниями, совершенно не связанными по содержанию. Например, такими: *«Если президент США — демократ, то в Африке водятся жирафы»*, *«Если арбуз — ягода, то в бензоколонке есть бензин»*.

Что такое рефлексия?

В самом общем смысле *рефлексия* (лат. *reflexio* — отражение) — это *направленность человеческой души на саму себя.* Имеются различные определения этого понятия. Чаще всего под рефлексией понимают размышление; анализ собственных мыслей и переживаний; размышление, полное сомнений и колебаний. Понятие рефлексии в современном смысле было впервые употреблено английским философом *Джоном Локком* (1632–1704). Рефлексия, с его точки зрения, особое оперирование субъекта с собственным сознанием, порождающее в результате идеи об этом сознании.

Человек рефлексирует, когда говорит: «Я думаю, что я думаю, и т. д.». Согласно Лефевру, описание рефлексии подразумевает, что субъект A может быть изображен двумя символическими элементами: собственно субъект и его «планшет сознания», в котором помещается то, как данный субъект видит мир, то есть некоторое изображение a_1 (рис. 2.30).

Таким образом, появляется рефлексивная структура, в которой субъект A обладает «планшетом сознания», на котором представлена его картина действительности. В нее, в частности, могут входить он сам, другие субъекты, а также воображаемые им предметы и ситуации. Символически такая структура субъекта A выражается формулой $A = a_0^{a_1}$, где a_0 — субъект как он есть (каким его может видеть «абсолютный наблюдатель»), а a_1 — то, что

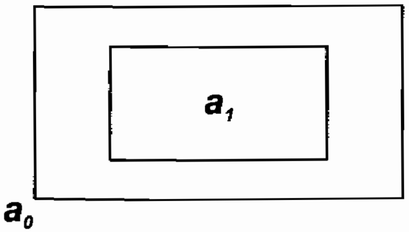


Рис. 2.30. Субъект *A* с «планшетом»

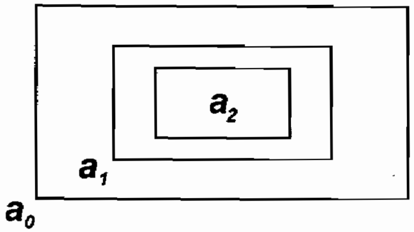


Рис. 2.31. Рефлексивная структура второго ранга

находится в его воображении, то есть это представление субъекта о нем самом. Но можно рассмотреть рефлексию 2-го ранга типа:

$$A = a_0^{a_1^{a_2}},$$

где a_1 — представление субъекта о нем самом, а a_2 — представление субъекта о собственной мысли (рис. 2.31).

А теперь введем еще одно мудреное слово — «интенция» (от лат. *intentio* — стремление), означающее «намерение, цель, направление или направленность сознания, воли и чувства на какой-либо предмет». В выражении $a_0^{a_1}$ символ a_0 означает интенцию субъекта A, а символ a_1 означает интенцию своего образа. Мы примем, что существует некий способ оценивать интенции и поступки субъекта как позитивные (1) или негативные (0), как это делается в алгебре логики. Отрицательная оценка субъектом себя означает наличие у этого субъекта чувства вины. Отрицательная оценка партнера означает чувство осуждения партнера.

Рассмотрим теперь выражение:

$$A = a_0^{a_1^{a_2}}. \tag{2.86}$$

В нем показатель $A_1 = a_1^{a_2}$ означает образ субъекта A в его представлении. Оценка $A_1 = 0$ означает, что субъект оценивает свое поведение как негативное, наоборот, $A_1 = 1$ означает, что субъект оценивает себя положительно. Показатель a_2 есть представление субъекта A о том, как он себя оценивает. Оценка $a_2 = 1$ означает, что он видит себя как положительно оценивающего свое поведение. Оценка $a_2 = 0$ означает, что он считает свою самооценку негативной.

Лефевр начал исследовать рефлексию (2.86), то есть рефлексию 2-го ранга, где a_1 — представление (мысль) субъекта о самом себе, a_2 — представление (мысль) субъекта о собственной мысли. При этом $A_1 = a_1^{a_2}$ есть оценка субъектом себя с учетом его представления о самом себе.

Важная идея Лефевра состоит в том, что оценка субъектом себя и ощущение этой оценки как негативной или позитивной осуществляется без усилий сознания, то есть в каждом субъекте как бы существует «рефлексивный компьютер», который делает самооценки автоматически.

А теперь рассмотрим, какие значения принимает функция (2.86) в зависимости от значения переменных (оценок) a_0, a_1, a_2.

Для этого вначале рассмотрим выражение $A_1 = a_1^{a_2}$. Мы можем записать конкретные значения этого выражения в зависимости от значений a_1, a_2:

$$1^1 = 1; 0^1 = 0; 1^0 = 1; 0^0 = 1.$$

Эти выражения не вызывают никаких возражений с математической точки зрения. Выражение $0^0 = 1$ принимается в математике правильным по определению.

А теперь сопоставим эти выражения с таблицей истинности для функции импликации (табл. 2.10). Из этого сравнения вытекает, что выражение $A_1 = a_1^{a_2}$ задает импликацию $A_1 = a_2 \to a_1$. Если теперь рассмотреть значения функции (2.85), то можно сделать вывод, что эта функция также представляет импликацию более сложного типа, а именно:

$$A = (a_2 \to a_1) \to a_0. \tag{2.87}$$

Выражение (2.87) и есть ключевая идея Владимира Лефевра! А теперь рассмотрим таблицу истинности для логической функции (2.87).

Таблица 2.11. Таблица истинности для функции Лефевра

a_0	1	1	1	1	0	0	0	0
a_1	1	0	1	0	1	0	1	0
a_2	1	1	0	0	1	1	0	0
A	1	1	1	1	0	1	0	0

Анализ табл. 2.11 приводит к весьма интересному выводу. Из общего количества возможных оценок (8), 5 оценок имеют значение 1 (положительные оценки) и только 3 оценки имеют значение 0 (негативные оценки), то есть наш «рефлексивный компьютер» автоматически (то есть без участия нашего сознания) выдает нам отношение «негативных» оценок к «положительным» как $3/5 = 0{,}6$. Но ведь 3 и 5 — это соседние числа Фибоначчи, а их отношение 0,6 весьма близко к золотой пропорции 0,62!

Теория Лефевра весьма оригинально объясняет нам появление Золотого сечения в рассмотренном выше психологическом эксперименте с фасолью, когда субъект автоматически, то есть без участия сознания, всегда делает свой выбор в соответствии с принципом Золотого сечения! Этот парадоксальный вывод может иметь весьма неожиданные приложения к так называемым

бихевиористским, то есть поведенческим наукам. Одной из таких теорий является *теория волн* Эллиотта, активно развиваемая в американской науке.

2.17. Волны Эллиотта

Если теория Лефевра верна, то есть все процессы поведения человека и принимаемые им решения основаны на принципе Золотого сечения, то вполне возможно, что числа Фибоначчи и Золотое сечение обнаруживают себя и в такой «бихевиористской» системе, как экономика, которая является функцией человеческого поведения и принимаемых многими людьми решений. И здесь нас ожидает огромный сюрприз! Оказывается, еще в первой половине XX века американский бухгалтер и экономист Ральф Эллиотт развил оригинальную теорию, которая имеет отношение к колебаниям цен на фондовом рынке. Эти исследования получили в современной науке название *волны Эллиотта*.

Ральф Нельсон Эллиотт

Ральф Нельсон Эллиотт (1871–1948)

Кто же такой Эллиотт и как он пришел к своему открытию? Ральф Нельсон Эллиотт (1871–1948) был одним из ярких представителей американского Ренессанса. Бухгалтер по образованию, он специализировался в реорганизации и оздоровлении больших компаний типа экспортно-импортных фирм и железных дорог в США и Центральной Америке.

В 1924 году Государственный департамент США назначил Эллиотта в качестве главного бухгалтера по Никарагуа, которыми США в то время управляли. Позже Эллиотт написал предложение по поводу внешней политики США, основанное на его многолетнем опыте работы в Центральной и Южной Америке, и представил его в соответствующий государственный департамент. Наиболее важные идеи этого предложения были отражены позже в программе «Хороший сосед», разработанной администрацией Франклина Рузвельта и в более современных программах развития Международного банка.

В начале 40-х годов Эллиотт переболел тяжелой формой анемии и едва выжил после истощения. Ему необходимо было чем-то занять свой мозг в перерывах между приступами болезни. Именно в это время он направляет все свое внимание на изучение поведения фондового рынка. Исследуя особенности ценовых моделей на рынке, Эллиотт изучал годовые, месячные, недельные, дневные, часовые и получасовые графики различных фондовых индексов, охватывающих 75-летнюю историю поведения рынка. В мае 1934 года результаты наблюдений Эллиотта за поведением фондового рынка начали складываться в совокупность принципов, которым подчинялись движения волн ценовых значений фондовых индексов. К ноябрю 1934 года уверенность Р. Н. Эллиотта в своей концепции достигла такого уровня, что он решает представить ее на суд по крайней мере одному представителю финансового мира — Чарльзу Коллинзу, члену Инвестиционного совета *(Charles J. Collins, Investment Counsel, Inc. in Detroit)*. Через пару месяцев прогнозов и под впечатлением от их точности Коллинз согласился принять участие в работе над книгой для широкой публики о волновых закономерностях фондового рынка. Книга «Закон волн» *(The Wave Principle)* увидела свет 31 августа 1938 года. В первой ее главе было сделано следующее заявление:

> «Никакая истина не нашла большего повсеместного признания, чем та, что Вселенной правит закон. Очевидно, что без закона был бы хаос, а там, где хаос, нет ничего... Весьма далеко идущее исследование в области... человеческой деятельности показало, что практически весь ход развития, который является результатом нашей социально-экономической жизнедеятельности, следует некоему закону, который заставляет результаты повторяться в виде схожих и неизменно рекуррентных последовательностей определенного набора волн или импульсов установленной формы... Фондовый рынок демонстрирует общие волновые принципы с социально-экономической деятельностью... Он имеет свой закон, так же как и любая другая сущность во вселенной».

10 ноября 1938 года Эллиотт опубликовал первое из длинной серии «пояснительных писем» *(Interpretive Letters)*, в котором проводился анализ состояния рынка и давался прогноз его движения. В начале 1939 года Эллиотт получает заказ на 12 статей по *закону волн* для журнала *Financial World*. Эти статьи способствовали росту репутации Эллиотта в инвестиционных кругах и привели к публикации ряда его «Образовательных бюллетеней» *(Educational Bulletins)*. Один из таких бюллетеней поднял статус закона волн от полного каталога моделей поведения рынка до обширной теории поведения человеческого общества, что явилось новым для таких областей науки, как экономика и социология.

К началу 40-х годов Ральф Эллиотт завершил разработку концепции, в которой взлеты и падения человеческих эмоций и результаты человеческой деятельности следуют естественной последовательности событий, управляемой законом природы. **Он соединил модели поведения человеческого общества с соотношением Фибоначчи, или золотой пропорцией,** — математическим явлением, известным в течение тысячелетий математикам, естествоиспытателям, художникам, зодчим и философам в качестве вездесущего закона природы, которому подчиняется форма и движение.

В 1946-м он подготовил большую книгу *Nature's Law*, в которой он развил свои идеи относительно связи *волнового принципа* с числами Фибоначчи. Итак, мы подошли к главной идее Эллиотта — связи законов фондового рынка с Золотым сечением!

Эллиотт писал:

> «Законы Природы охватывают наиболее важный из всех элементов, синхронизацию. Законы Природы — не система или метод игры рынка, но это — явление, которое появляется, чтобы отметить прогресс всей человеческой деятельности. Его приложение к прогнозированию носит революционный характер».

Открытия Эллиотта основываются на законе Природы. Он замечает:

> «Этот закон за пределами рынка может быть обнаружен только тогда, когда рынок просматривается в его подходящем освещении и затем анализируется на основе этого подхода. Выражаясь просто, фондовый рынок — создание человека и поэтому он отражает все странности человеческого поведения».

И еще одно его замечательное высказывание:

> «Все человеческие действия имеют три особенности: модель, время и отношение, все они подчиняются числам Фибоначчи».

Ритм в природе

Никакая истина не нашла большего повсеместного признания, чем та, что Вселенной правит закон. Очевидно, что без закона был бы хаос, а там, где хаос, нет ничего. Поскольку отличительной чертой закона является именно установленный порядок или постоянство, то из этого следует, что все происходящее повторится и может быть предсказано, если мы знаем этот закон.

Человек является природным объектом ничуть не меньше, чем Солнце или Луна, и его деятельность, выраженная языком цифр, также является предметом анализа. Человеческая деятельность, хотя и является поразительной по своей сути, при рассмотрении с точки зрения ритмических процессов содержит точный и понятный ответ на некоторые наши самые волнующие вопросы. Более того, так как человек является участником ритмического процесса, прогнозы, выдвигаемые в связи с его деятельностью, могут простираться далеко в будущее с обоснованием и достоверностью прежде недостижимыми.

Весьма далеко идущее исследование в области, попадающей под определение человеческой деятельности, показало, что практически весь ход развития, который является результатом нашей социально-экономической жизнедеятельности, следует некоему закону, который заставляет результаты повторяться в виде схожих и неизменно рекуррентных последовательностей определенного набора волн или импульсов установленной формы. Более того, оно показало, что эти волны или импульсы в своей глубине несут стойкую взаимосвязь между собой и с течением времени. Чтобы продемонстрировать и объяснить это явление наилучшим образом, необходимо взять некий пример из области человеческой деятельности, который предоставит массу достоверных данных, и для этой цели нет ничего лучше, чем фондовая биржа.

Волны фондового рынка

Человеческие эмоции, как упоминалось выше, носят ритмический характер. Они развиваются в виде волн определенного числа и направления. Это явление проявляется во всех видах человеческой деятельности, будь то бизнес, политика или поиски развлечений. Оно особенно наглядно на тех свободных рынках, где широко распространено общественное участие в формировании цен. Следовательно, движения цен на долговые обязательства, акции и биржевые товары в первую очередь являются предметом для изучения и иллюстрации этого волнового движения. Но все принципы, изложенные здесь, одинаково применимы к волновому движению в любой области, где отмечена человеческая деятельность.

Суть *закона волн*, открытого Эллиоттом, основывается на том, что поведение общества или толпы развивается и изменяется в виде распознаваемых моделей. В качестве основного объекта применения своего открытия Эллиотт выбрал фондовый рынок. Он показал, что постоянно меняющаяся траектория цен фондового рынка образует некоторый структурированный рисунок, который отражает гармонию Золотого сечения, найденную в природе. Эллиотт выделил 13 моделей движения, или *волн*, фондового рынка, которые снова и снова повторяются в потоке рыночных цен.

Согласно теории Эллиотта, развитие рыночных цен принимает вид пяти волн особой структуры (рис. 2.32). Три из них, отмеченные цифрами 1, 3, 5, совершают направленное (прогрессивное) движение. Они разделяются двумя *откатами*, или *прерываниями (countertrend interruptions)*, помеченными цифрами 2 и 4, как показано на рис. 2.32.

Эти два отката являются неотъемлемой частью общего направленного движения. Эти прерывания, очевидно, необходимы для того, чтобы возникло новое целенаправленное (прогрессивное) движение. Таким образом, существует два стиля развития волн: *движущий (motive) и корректирующий (corrective)*. В пятиволновой модели *движущими* являются волны 1, 3, 5; волны 2 и 4 являются *корректирующими*.

Пятиволновая модель является базисной моделью, поскольку все остальные модели могут быть составлены из нее.

Эллиотт обнаружил три характерные особенности 5-волновой формы, а именно: волна выходит за пределы начала волны 1, волна 3 никогда не является самой короткой волной, волна 4 никогда не вступает в ценовую территорию волны 1.

В своей книге 1938 года «Закон волн» и в серии статей, опубликованных в 1939 году журналом *Financial World*, Эллиотт показал, что фондовый рынок развивается в соответствии с базисным ритмом, или моделью из пяти волн вверх и трех волн вниз, формируя полный цикл из восьми волн.

Модель из пяти волн вверх с последующими тремя волнами вниз показана на рис. 2.33.

Рисунок 2.33 показывает первые две волны на рис. 2.32 в более детализированном виде. Обратим внимание на различие в их

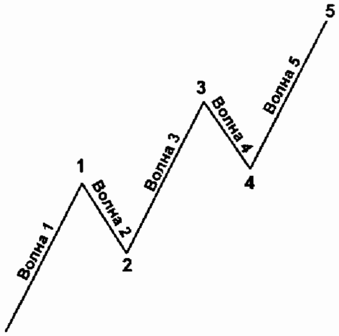


Рис. 2.32. Основная модель

Рис. 2.33. Структура волн (1) и (2)

подразбиениях, которые отражают два режима образования волн: ***побуждающий*** и ***корректирующий***. Эти два режима существенно различны как по их роли, так и по конструкции.

«Побуждающая» волна имеет 5-волновую структуру. Ее субволны обозначаются числами (в данном случае 1, 2, 3, 4, 5). Как 5-волновая модель на рис. 2.32, так и ее самонаправленные компоненты, то есть волны (1), (3) и (5), используют «побуждающий» режим. Их структуры названы «побуждающими», потому что они мощно побуждают рынок.

Корректирующая волна имеет 3-волновую структуру. Ее субволны обозначены буквами (в данном случае A, B, C). Все контрнаправленные прерывания, которые включают волны (2) и (4) на рис. 2.33, используют «корректирующий» режим. Их структуры названы «корректирующими», потому что каждое прерывание возникает как реакция на предшествующую «побуждающую» волну.

Самое удивительное: основная модель фондового рынка, предложенная Эллиоттом, основывается на числах Фибоначчи 5 и 3!

Анализируя суть своего открытия, Эллиотт написал:

> «Позже я нашел, что основой моих открытий был "Закон Природы", известный проектировщикам Большой Пирамиды в Гизе, которая, возможно, была создана 5000 лет назад».

Даже если мы не согласны с некоторыми выводами из исследований Эллиотта, мы должны восхититься его замечательными идеями. Наиболее последовательным продолжателем идей Эллиотта в современной науке является американский исследователь

Роберт Пректер *(Robert Prechter)*, который опубликовал в 1999 году книгу *The Wawe Principle of Social Behaviour and the New Science of Socionomics*, посвященную развитию идей Эллиотта. Как видим уже из названия книги Пректера, он претендует на создание новой науки, названной им ***социономика***.

Роберт Пректер в своей книге делает следующее весьма сильное заявление:

> «Волновой принцип Эллиотта для социологии есть то же самое, что и законы Ньютона для физики».

Время, однако, покажет, прав ли Пректер, сравнивая «волновой принцип» Эллиотта с законами Ньютона. Можно соглашаться или опровергать указанное выше заявление Пректера, однако одно несомненно: благодаря работам Эллиотта и его последователей теория современной социологии и рыночной экономики пополнилась весьма глубокой научной концепцией о том, что Золотое сечение, лежащее в основе законов Природы, определяет не только структуру поэтического или музыкального произведения, но и законы человеческого поведения, а через них законы развития фондового рынка!

2.18. Обобщенные числа Фибоначчи и математика гармонии

Основные понятия комбинаторики

Начнем с изложения основных понятий комбинаторики. Как известно, комбинаторика занимается различного вида сочетаниями, которые можно образовать из элементов некоторого множества. Некоторые элементы комбинаторики были известны в Индии еще во II веке до н. э. Индусы умели вычислять числа, которые мы обозначаем C_n^m, то есть сочетания из n элементов, взятых по m, и знали формулу

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^m = 2^n. \qquad (2.88)$$

Предполагают, что индусские математики изучали соединения в связи с применением их в поэтике, науке о структуре стихов и поэтических произведений, например, в связи с подсчетом возможных сочетаний ударных (долгих) и безударных (кратких) слогов стопы, состоящей из n слогов.

Термин «комбинаторика» стал употребляться после опубликования Лейбницем в 1666 году работы «Рассуждение о комбинаторном искусстве», в которой впервые дано научное обоснование теории сочетаний и перестановок. Изучением «размещений» впервые занимался Якоб Бернулли во второй части своей знаменитой книги *Ars conectandi* («Искусство предугадывания»), опубликованной в 1713 году. Он же ввел соответствующий термин и употреблял в нашем смысле также термин «перестановка». Термин же «сочетание» ввел Б. Паскаль в своем «Трактате об арифметическом треугольнике» (1665).

Известна формула

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \qquad (2.89)$$

где $n! = 1\times 2\times 2\times \ldots \times n$ — *факториал* от n.

Заметим, что термин «факториал» происходит от латинского *factor* — производящий.

Бином Ньютона

Слово «бином» (от лат. *bis* — «дважды» и греч. «номос» — член) означает «двучлен».

Запишем следующие выражения:

$$\begin{aligned} &(a+b)^0 = 1; \\ &(a+b)^1 = 1a + 1b; \\ &(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2; \\ &(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^2. \end{aligned} \qquad (2.90)$$

Заметим, что первые два выражения из (2.90) тривиальны, а остальные два нам хорошо известны из курса алгебры средней школы.

Возникает вопрос: чему равно $(a + b)^n$? Ответ на этот вопрос дает знаменитая математическая формула, известная под названием «бином Ньютона», представляющая разложение целой положительной степени n бинома $a + b$:

$$\begin{aligned} (a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + C_n^3 a^{n-3}b^3 + \\ \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1} ab^{n-1} + C_n^n b^n. \end{aligned} \qquad (2.91)$$

В этой формуле появляются любопытные коэффициенты C_n^k, которые называются *биномиальными коэффициентами.*

Заметим, что в названии «бином Ньютона» заключена историческая несправедливость, так как эта формула была известна задолго до Ньютона многим ученым разных стран, в том числе Ал-Каши, Тарталье, Ферма, Паскалю. Заслуга Ньютона состоит в том, что он распространил ее на любое действительное число n, то есть показал, что формула (2.91) верна и тогда, когда n является рациональным или иррациональным, положительным или отрицательным.

Формулы (2.90) являются частными случаями общей формулы (2.91). В частности, при $n = 1$ формула (2.91) принимает вид:

$$(a+b)^1 = C_1^0 a + C_1^1 b = 1a + 1b,$$

откуда вытекает, что $C_1^0 = 1, C_1^1 = 1$.

При $n = 2$ формула (2.91) принимает вид:

$$(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2,$$

откуда вытекает, что $C_2^0 = 1, C_2^1 = 2, C_2^2 = 1$.

Таким образом, разложение (2.91) легко получить, если мы научимся вычислять биномиальные коэффициенты C_n^k.

Треугольник Паскаля

Ответ на вопрос, как найти значение C_n^k для любых целых неотрицательных n и k, еще в XVII веке дал знаменитый французский физик и математик Блез Паскаль (1623–1662).

Паскаль обнаружил, что биномиальные коэффициенты обладают следующими замечательными свойствами:

$$\begin{aligned} &C_n^0 = C_n^n = 1; \\ &C_n^k = C_n^{n-k}; \\ &C_{n+1}^k = C_n^{k-1} + C_n^k. \end{aligned} \qquad (2.92\text{–}2.94)$$

Последнее свойство (2.94) называется также *законом Паскаля.* Именно используя соотношение (2.94), Паскаль предложил изящный способ вычисления биномиальных коэффициентов, расположив их в виде треугольной таблицы чисел (табл. 2.12), называемой *треугольником Паскаля.* Суть этого способа состоит в следующем. Рассмотрим бесконечную таблицу чисел, построенных по закону Паскаля (табл. 2.12).

Таблица 2.12. Треугольник Паскаля

									1									
								1		1								
							1		2		1							
						1		3		3		1						
					1		4		6		4		1					
				1		5		10		10		5		1				
			1		6		15		20		15		6		1			
		1		7		21		35		35		21		7		1		
	1		8		28		56		70		56		28		8		1	
1		9		36		84		126		126		84		36		9		1

Верхнюю строку табл. 2.12 будем считать *нулевой строкой*. Здесь находится единственный биномиальный коэффициент $C_0^0 = 1$.

Следующая строка, называемая первой, состоит из двух единиц, симметрично расположенных относительно единицы нулевой строки. Это биномиальные коэффициенты $C_1^0 = 1$ и $C_1^1 = 1$.

Каждая последующая строка состоит из двух единиц, расположенных по ее краям (это биномиальные коэффициенты типа $C_n^0 = 1$ и $C_n^n = 1$); каждое «внутреннее» число этой строки формируется из двух чисел предыдущей строки, стоящих над этим числом слева и справа относительно этого числа, по закону Паскаля (2.94). Из табл. 2.12 легко вывести следующие свойства треугольника Паскаля:

1. Сумма чисел n-й строки треугольника Паскаля равна 2^n, что соответствует формуле (2.88).

2. Все строки треугольника Паскаля симметричны, что вытекает из свойства (2.93).

Заметим, что указанный выше треугольник Паскаля впервые появился в сочинении Паскаля «Трактат об арифметическом треугольнике» (1665).

Биномиальные коэффициенты и треугольник Паскаля широко используются в различных разделах математики, информатики и других науках.

По существу, это один из фундаментальных математических объектов, лежащих в основе точных наук. Знаменитый математик Якоб Бернулли утверждал следующее.

«Эта таблица имеет ряд чудесных свойств. Только что мы показали, что она составляет существо теории соединений, но те, кто тесно соприкасаются с геометрией, знают, что она хранит ряд фундаментальных секретов этой области математики».

Блез Паскаль (1623–1662)

Прямоугольный треугольник Паскаля

Возникает вопрос: какое отношение треугольник Паскаля имеет к числам Фибоначчи и Золотому сечению? Оказывается, самое непосредственное. Более того, именно треугольник Паскаля и является источником новых математических результатов, которые были положены профессором Стаховым в основу созданной им математики гармонии.

Как известно, существует много различных форм представления треугольника Паскаля. Для наших исследований нам будет удобно использовать еще один способ представления биномиальных коэффициентов — в виде таблицы, напоминающей прямоугольный треугольник (табл. 2.13). Такую таблицу биномиальных коэффициентов мы будем называть *прямоугольным треугольником Паскаля*.

Таблица 2.13. Прямоугольный треугольник Паскаля

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
		1	3	6	10	15	21	28	36
			1	4	10	20	35	56	84
				1	5	15	35	70	126
					1	6	21	56	126
						1	7	28	84
							1	8	36
								1	9
									1
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512

Такая таблица начинается с «нулевого столбца», который содержит единственный биномиальный коэффициент $C_0^0 = 1$ и из «нулевого ряда», который содержит биномиальные коэффициенты:

$$C_0^0 = 1,\ C_1^0 = 1,\ C_2^0 = 1,$$
$$C_3^0 = 1, \ldots, C_n^0 = 1, \ldots$$

Заметим, что «гипотенуза» прямоугольного треугольника Паскаля (табл. 2.13) состоит из биномиальных коэффициентов:

$$C_0^0 = 1,\ C_1^1 = 1,\ C_2^2 = 1, \ldots, C_n^n = 1, \ldots$$

Заметим также, что в n-м столбце сверху вниз расположены следующие биномиальные коэффициенты:

$$C_n^0,\ C_n^1,\ C_n^2, \ldots, C_n^n.$$

При этом все клетки под «гипотенузой» являются «пустыми». Это означает, что все диагональные коэффициенты типа C_n^m $(m > n)$ тождественно равны нулю, то есть при $m > n$

$$C_n^m = 0. \qquad (2.95)$$

Тогда, если просуммировать биномиальные коэффициенты n-го столбца рассматриваемого треугольника Паскаля, то согласно (2.88) мы получим двоичное число 2^n. Если это сделать для всех столбцов, начиная с нулевого, то мы получим широко известный нам двоичный ряд чисел:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots, 2n, \ldots \qquad (2.96)$$

Таким образом, мы можем утверждать, что треугольник Паскаля «генерирует» двоичный ряд чисел!

1-треугольник Паскаля

А теперь сдвинем каждый ряд исходного треугольника Паскаля (табл. 2.13) на один столбец вправо относительно предыдущего ряда.

В результате такого преобразования мы получим некоторый «деформированный» треугольник Паскаля (табл. 2.14), который мы будем называть *1-треугольником Паскаля.*

Таблица 2.14. 1-треугольник Паскаля

1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
				1	3	6	10	15	21	28	36
						1	4	10	20	35	56
								1	5	15	35
										1	6
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Если теперь просуммировать биномиальные коэффициенты 1-треугольника Паскаля по столбцам, то, к нашему изумлению, мы обнаружим, что такое суммирование приведет нас к числам Фибоначчи:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots, F_1(n+1), \ldots, \qquad (2.97)$$

где через $F_1(n + 1)$ обозначено $(n + 1)$-е число Фибоначчи, которое задается с помощью следующей рекуррентной формулы:

$$F_1(n+1) = F_1(n) + F_1(n-1). \qquad (2.98)$$

Формула (2.98) справедлива при $n > 1$ и при следующих начальных условиях:

$$F_1(1) = F_1(2) = 1. \qquad (2.99)$$

Анализируя табл. 2.14, легко вывести математическую формулу, которая позволяет выразить числа Фибоначчи через биномиальные коэффициенты:

$$F_1(n+1) = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + C_{n-3}^3 + C_{n-4}^4 + \ldots \qquad (2.100)$$

В результате проведенных рассуждений мы нашли, что существует два способа представления чисел Фибоначчи: в виде рекуррентной формулы (2.98), (2.99) и в виде формулы (2.100), выражающей числа Фибоначчи через биномиальные коэффициенты.

Используя формулу (2.100), 7-е число Фибоначчи $F_1(7) = 13$ из табл. 2.14 можно представить в виде следующей суммы биномиальных коэффициентов:

$$F_1(7) = C_6^0 + C_5^1 + C_4^2 + C_3^3 + C_2^4 + \ldots \qquad (2.101)$$

Заметим, что биномиальный коэффициент C_2^4 в сумме (2.101) и все последующие за ним биномиальные коэффициенты тождественно равны нулю согласно определению (2.95). Это означает, что выражение (2.101) на самом деле представляет собой конечную сумму биномиальных коэффициентов, то есть

$$F_1(7) = C_6^0 + C_5^1 + C_4^2 + C_3^3 = 1+5+6+1 = 13. \qquad (2.102)$$

Р-треугольники Паскаля

А теперь закрепим наш успех и покажем, что треугольник Паскаля является источником новых математических результатов, которые и являются основой «математики гармонии» и представляют интерес для комбинаторики.

Рассмотрим ситуацию, когда в исходном треугольнике Паскаля (табл. 2.13) мы сдвигаем биномиальные коэффициенты каждого ряда на p столбцов вправо относительно предыдущего ряда, где p может принимать значения из множества $\{0,1,2,3, ...\}$. Полученный таким путем «деформированный» треугольник Паскаля мы будем называть *р-треугольником Паскаля.*

Суммирование биномиальных коэффициентов p-треугольника Паскаля приведет нас к некоторому новому числовому ряду, который задается следующим рекуррентным соотношением:

$$F_p(n+1) = F_p(n) + F_p(n-p) \text{ для } n > p+1;$$

$$F_p(1) = F_p(2) = \ldots = F_p(p+1) = 1. \qquad (2.103–2.104)$$

Числовые ряды, соответствующие формулам (2.103), (2.104), были названы *р-числами Фибоначчи.*

Несложно понять, какой вид имеет формула, задающая p-числами Фибоначчи через биномиальные коэффициенты:

$$F_p(n+1) = C_n^0 + C_{n-p}^1 + C_{n-2p}^2 + C_{n-3p}^3 + C_{n-4p}^4 + \ldots \qquad (2.105)$$

А теперь посмотрим, во что вырождаются общие формулы (2.103), (2.104) и (2.105) при различных значениях p. Ясно, что для случая $p = 0$ рекуррентная формула (2.103) и начальные условия (2.104) принимают следующий вид:

$$F_0(n) = F_p(n-1) + F_0(n-1) = 2F_0(n-1) \text{ для } n > 1;$$

$$F_0(1) = 1. \qquad (2.106–2.107)$$

Нетрудно догадаться, что рекуррентная формула (2.106) при начальном условии (2.107) «генерирует» двоичные числа (2.96), которые и являются крайним частным случаем p-чисел Фибоначчи, соответствующим значению $p = 0$. При этом формула (2.105) вырождается в формулу (2.88), которая была известна в Индии уже во II веке до н. э.

Ясно, что при $p = 1$ общая рекуррентная формула (2.103), (2.104) сводится к рекуррентной формуле (2.98), (2.99) для классических чисел Фибоначчи (2.97); как упоминалось, эта формула была выведена Фибоначчи еще в XIII веке при исследовании «задачи о размножении кроликов».

Связь с золотыми р-пропорциями

Образуем теперь числовые последовательности, которые состоят из отношений соседних p-чисел Фибоначчи, то есть отношений типа

$$\frac{F_p(n)}{F_p(n-1)}.$$

Начнем с простейшего случая $p = 0$. Для этого случая p-числа Фибоначчи сводятся к классическим двоичным числам (2.96). Рассмотрим числовую последовательность, состоящую из отношений соседних двоичных чисел:

$$\frac{2}{1}, \frac{4}{2}, \frac{8}{4}, \frac{16}{8}, \ldots, \frac{2^n}{2^{n-1}}, \ldots \qquad (2.108)$$

Ясно, что любой член последовательности (2.108) всегда равен 2.

Рассмотрим теперь случай $p = 1$. Как было установлено, в этом случае p-числа Фибоначчи совпадают с классическими числами Фибоначчи (2.97), из которых мы можем образовать следующую числовую последовательность:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \ldots \qquad (2.109)$$

Выше было показано, что числовая последовательность (2.109) выражает так называемый *закон филлотаксиса*, то есть важную числовую закономерность, которая лежит в основе большинства «плотноупакованных» ботанических структур типа сосновой шишки, ананаса, подсолнечника, кактуса и т. д., то есть эта последовательность широко используется Природой (или Богом) при конструировании ботанических структур. С другой стороны, эта последовательность стремится к золотой пропорции

$$\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

которая является корнем уравнения Золотого сечения (1.2).

В общем случае (для заданного целого $p = 0, 1, 2, 3, \ldots$), исследуя отношения соседних p-чисел Фибоначчи

$$\frac{F_p(n)}{F_p(n-1)},$$

мы придем к алгебраическому уравнению (1.39), которое задает Золотые p-пропорции τ_p. Таким образом, в результате проведенных рассуждений мы пришли к очень важному результату:

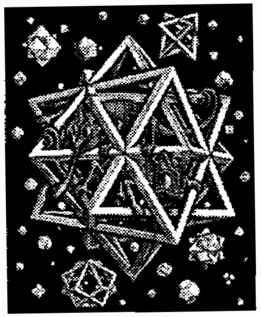
$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_p(n)}{F_p(n-1)} = \tau_p, \tag{2.110}$$

где τ_p — положительный корень алгебраического уравнения (1.39), называемое золотой p-пропорцией.

Напомним, что понятие золотой p-пропорции было введено нами, когда мы рассматривали обобщение задачи о Золотом сечении, в то время как p-числа Фибоначчи были выведены нами из треугольника Паскаля. Поэтому выражение (2.110), по существу, задает связь треугольника Паскаля, который является важнейшим «оригинальным» объектом комбинаторного анализа, с золотыми p-пропорциями.

Математика гармонии

Обобщенные числа Фибоначчи и обобщенные золотые пропорции, связанные соотношением (2.110), вместе с гиперболическими функциями Фибоначчи и Люка и «Золотым шофаром» лежат в основе нового междисциплинарного направления современной науки, названного профессором Стаховым математикой гармонии. Эта математика представляет собой «естественную» математику, которая может быть использована для моделирования процессов, протекающих в Природе. В настоящее время математика гармонии вызвала неожиданной интерес в западной науке. Об этом свидетельствует интерес к научным статьям Стахова и его учеников со стороны многих известных западных журналов. Например, международный журнал *Chaos, Solitons & Fractals* в течение 2005–2006 годов опубликовал 14 (!) фундаментальных статей по математике гармонии, представленных Стаховым для публикации. Однако изложение математики гармонии выходит за рамки настоящей книги. Это тема следующей книги профессора Стахова.



Глава 3
Правильные многогранники

3.1. Код да Винчи в платоновых телах

Правильные многоугольники и многогранники

Человек проявляет интерес к правильным многоугольникам и многогранникам на протяжении всей своей сознательной деятельности — от двухлетнего ребенка, играющего деревянными кубиками, до зрелого математика. Некоторые из правильных и полуправильных тел встречаются в природе в виде кристаллов, другие — в виде вирусов, которые можно рассмотреть с помощью электронного микроскопа.

Что же такое многоугольник и многогранник? Для ответа на этот вопрос напомним, что собственно геометрию определяют иногда как науку о пространстве и пространственных фигурах — двумерных и трехмерных. Двумерную фигуру можно определить как множество отрезков прямых, ограничивающих часть плоскости. Такая плоская фигура называется ***многоугольником.*** Из этого следует, что ***многогранник*** можно определить как множество многоугольников, ограничивающих часть трехмерного пространства. Многоугольники, образующие многогранник, называются его ***гранями.***

Издавна ученые интересовались ***идеальными,*** или ***правильными,*** многоугольниками, то есть многоугольниками, имеющими равные стороны и равные углы. Простейшим правильным многоугольником можно считать *равносторонний треугольник*, поскольку он имеет наименьшее число сторон, которое может ограничить часть плоскости. Общую картину интересующих нас правильных многоугольников наряду с равносторонним треугольником составляют: *квадрат* (четыре стороны), *пентагон* (пять сторон), *гексагон* (шесть сторон), *октагон* (восемь сторон), *декагон* (десять сторон) и т. д. Очевидно, что теоретически нет каких-либо ограничений на число сторон правильного многоугольника, то есть число правильных многоугольников бесконечно.

Что же такое правильный многогранник? Правильным называется такой многогранник, все грани которого равны (или конгруэнтны) между собой и при этом являются правильными многоугольниками. Сколько же существует правильных многогранников? На первый взгляд ответ на этот вопрос очень простой — столько же, сколько существует правильных многоугольников. Однако это не так. В «Началах» Евклида мы находим строгое доказательство того, что существует только пять выпуклых правильных многогранников, а их гранями могут быть только три типа правильных многоугольников: *треугольники*, *квадраты* и *пентагоны*.

Теории многогранников посвящено много книг. Одной из наиболее известных является книга английского математика М. Венниджера «Модели многогранников». В русском переводе эта книга опубликована издательством «Мир» в 1974 году. Эпиграфом к книге выбрано высказывание Бертрана Рассела:

> «Математика владеет не только истиной, но и высокой красотой — красотой отточенной и строгой, возвышенно чистой и стремящейся к подлинному совершенству, которое свойственно лишь величайшим образцам искусства».

Книга начинается с описания так называемых *правильных многогранников*, то есть многогранников, образованных простейшими правильными многоугольниками одного типа. Эти многогранники принято называть *платоновыми телами*, названными так в честь древнегреческого философа Платона, который использовал правильные многогранники в своей *космологии*. Мы начнем наше рассмотрение с *правильных многогранников*, гранями которых являются *равносторонние треугольники*. Первый из них — это *тетраэдр* (рис.3.1, *а* и рис. 24 на цветной вклейке). В тетраэдре три равносторонних треугольника встречаются в одной вершине; при этом их основания образуют новый равносторонний треугольник. Тетраэдр имеет наименьшее число граней среди платоновых тел и является трехмерным аналогом плоского правильного треугольника, который имеет наименьшее число сторон среди правильных многоугольников.

Следующее тело, которое образуется равносторонними треугольниками, называется *октаэдром* (рис. 3.1, *б*). В октаэдре в одной вершине встречаются 4 треугольника; в результате получается пирамида с четырехугольным основанием. Если соединить две такие пирамиды основаниями, то получится симметричное тело с 8 треугольными гранями — *октаэдр*.

Теперь можно попробовать соединить в одной точке 5 равносторонних треугольников. В результате получится фигура с 20 треугольными гранями — *икосаэдр* (рис. 3.1, *г*).

Следующая правильная форма многоугольника — *квадрат*. Если соединить три квадрата в одной точке и затем добавить еще три, мы получим совершенную форму с шестью гранями, называемую *гексаэдром* или *кубом* (рис. 3.1, *в*).

Наконец, существует еще одна возможность построения правильного многогранника, основанная на использовании следующего правильного многоугольника — *пентагона*. Если собрать 12 пентагонов таким образом, чтобы в каждой точке встречалось три пентагона, то получим еще одно платоново тело, называемое *додекаэдром* (рис. 3.1, *д*).

Следующим правильным многоугольником является *шестиугольник*. Однако если соединить три шестиугольника в одной точке, то мы получим поверхность, то есть из шестиугольников нельзя построить объемную фигуру. Любые другие правильные многоугольники выше шестиугольника не могут образовывать тел вообще. Из этих рассуждений вытекает, что существует всего только пять правильных многогранников, гранями которых могут быть только равносторонние треугольники, квадраты и пентагоны.

Существуют удивительные геометрические связи между всеми *правильными многогранниками*. Так, например, *куб* (рис. 3.1, *б*) и *октаэдр* (рис. 3.1, *в*) дуальны, то есть получаются друг из друга, если центры тяжести граней одного принять за вершины другого и обратно. Аналогично дуальны и *икосаэдр* (рис. 3.1, *г*) и *додекаэдр* (рис. 3.1, *д*). Тетраэдр (рис. 3.1, *а*) дуален сам себе. Додекаэдр

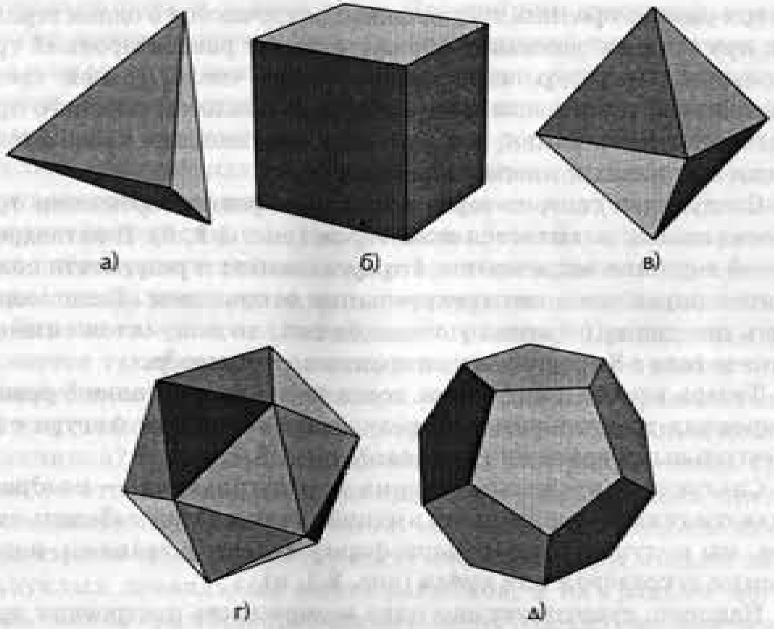


Рис. 3.1. Платоновы тела: а) — октаэдр («Огонь»), б) — гексаэдр или куб («Земля»), в) — октаэдр («Воздух»), г) — икосаэдр («Вода»), д) — додекаэдр («Вселенский разум»)

получается из куба построением «крыш» на его гранях (способ Евклида), вершинами тетраэдра являются любые четыре вершины куба, попарно не смежные по ребру, то есть из куба могут быть получены все остальные правильные многогранники. Сам факт существования всего пяти действительно правильных многогранников удивителен, ведь правильных многоугольников на плоскости бесконечно много!

Числовые характеристики платоновых тел

Основными числовыми характеристиками *платоновых тел* является число сторон грани *m*, число граней, сходящихся в каждой вершине *n*, число граней *Г*, число вершин *В*, число ребер *Р* и число плоских углов *У* на поверхности многогранника. Эйлер открыл и доказал знаменитую формулу

$$В - Р + Г = 2,$$

связывающую числа вершин, ребер и граней любого выпуклого многогранника. Указанные выше числовые характеристики приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1. Числовые характеристики платоновых тел

Многогранник	Число сторон грани, *m*	Число граней, сходящихся в вершине, *n*	Число граней, *Г*	Число вершин, *В*	Число ребер, *Р*	Число плоских углов на поверхности, *У*
Тетраэдр	3	3	4	4	6	12
Гексаэдр (куб)	4	3	6	8	12	24
Октаэдр	3	4	8	6	12	24
Икосаэдр	3	5	20	12	30	60
Додекаэдр	5	3	12	20	30	60

Золотая пропорция в додекаэдре и икосаэдре

Додекаэдр и двойственный ему икосаэдр (рис. 3.1, *г*, *д*) занимают особое место среди платоновых тел. Прежде всего, необходимо подчеркнуть, что геометрия додекаэдра и икосаэдра непосредственно связана с золотой пропорцией. Действительно, гранями додекаэдра (рис. 3.1, *д*) являются *пентагоны*, то есть правильные пятиугольники, основанные на золотой пропорции. Если внимательно посмотреть на икосаэдр (рис. 3.1, *г*), то можно увидеть, что в каждой его вершине сходятся пять треугольников, внешние стороны которых образуют *пентагон*. Уже этих фактов достаточно, чтобы убедиться в том, что золотая пропорция играет существенную роль в конструкции этих двух платоновых тел.

Но существуют более глубокие математические подтверждения фундаментальной роли, которую играет золотая пропорция в икосаэдре и додекаэдре. Известно, что эти тела имеют три специфические сферы. Первая (внутренняя) сфера вписана в тело и касается его граней. Обозначим радиус этой внутренней сферы через R_i. Вторая, или средняя, сфера касается ее ребер. Обозначим радиус этой сферы через R_m. Наконец, третья (внешняя) сфера описана вокруг тела и проходит через его вершины. Обозначим ее радиус через R_c. В геометрии доказано, что значения радиусов указанных сфер для додекаэдра и икосаэдра, имеющего ребро единичной длины, выражается через золотую пропорцию τ (табл. 3.2).

Таблица 3.2. Золотая пропорция в сферах додекаэдра и икосаэдра

Многогранник	R_c	R_m	R_i
Икосаэдр	$\frac{1}{2}\tau\sqrt{3-\tau}$	$\frac{1}{2}\tau$	$\frac{\tau^2}{2\sqrt{3}}$
Додекаэдр	$\frac{\tau\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\tau^2}{2}$	$\frac{\tau^2}{2\sqrt{3-\tau}}$

Заметим, что отношение радиусов

$$\frac{R_c}{R_i}=\frac{\sqrt{3(3-\tau)}}{\tau}$$

одинаково как для икосаэдра, так и для додекаэдра. Таким образом, если додекаэдр и икосаэдр имеют одинаковые вписанные сферы, то их описанные сферы также равны между собой. Доказательство этого математического результата дано в «Началах» Евклида.

В геометрии известны и другие соотношения для додекаэдра и икосаэдра, подтверждающие их связь с золотой пропорцией. Например, если взять икосаэдр и додекаэдр с длиной ребра, равной единице, и вычислить их внешнюю площадь и объем, то они выражаются через золотую пропорцию (табл. 3.3).

Таблица 3.3. Золотая пропорция во внешней площади и объеме додекаэдра и икосаэдра

Параметры	Икосаэдр	Додекаэдр
Внешняя площадь	$5\sqrt{3}$	$\frac{15\tau}{\sqrt{3-\tau}}$
Объем	$\frac{5\tau^2}{6}$	$\frac{5\tau^3}{2(3-\tau)}$

Таким образом, существует огромное количество соотношений, полученных еще античными математиками, подтверждающих замечательный факт, что именно *золотая пропорция является главной пропорцией додекаэдра и икосаэдра*, и этот факт является особенно интересным с точки зрения так называемой *додекаэдро-икосаэдрической доктрины*, которую мы рассмотрим ниже.

Космология Платона

Платон (427–347 годы до н. э.)

Рассмотренные выше правильные многогранники получили название *платоновых тел*, так как они занимали важное место в философской концепции Платона об устройстве мироздания.

Четыре многогранника олицетворяли в ней четыре сущности, или стихии. *Тетраэдр* символизировал *Огонь*, так как его вершина устремлена вверх; *икосаэдр* — *Воду*, так как он самый «обтекаемый» многогранник; *куб* — *Землю*, как самый «устойчивый» многогранник; *октаэдр* — *Воздух*, как самый «воздушный» многогранник. Пятый многогранник, *додекаэдр*, воплощал в себе «все сущее», «вселенский разум», символизировал все мироздание и считался *главной геометрической фигурой мироздания*.

Гармоничные отношения древние греки считали основой мироздания, поэтому четыре стихии у них были связаны такой пропорцией: *земля : вода = воздух : огонь*. Атомы «стихий» настраивались Платоном в совершенных консонансах, как четыре струны лиры. Напомним, что консонансом называется приятное созвучие. В связи с этими телами уместно будет сказать, что такая система элементов, включавшая четыре элемента — землю, воду, воздух и огонь, — была канонизирована Аристотелем. Эти элементы оставались четырьмя краеугольными камнями мироздания в течение многих веков. Вполне возможно отождествить их с известными нам четырьмя состояниями вещества — твердым, жидким, газообразным и плазменным.

Таким образом, представление о «сквозной» гармонии бытия древние греки связывали с ее воплощением в платоновых телах. Влияние знаменитого греческого мыслителя Платона сказалось и на «Началах» Евклида. В этой книге, которая на протяжении веков была единственным учебником геометрии, дано описание «идеальных» линий и «идеальных» фигур. Самая «идеальная» линия — *прямая*, а самый «идеальный» многоугольник — *правильный многоугольник*, имеющий равные стороны и равные углы. Простейшим правильным многоугольником можно считать *равносторонний треугольник*, поскольку он имеет наименьшее число сторон, которое может ограничивать часть плоскости. Интересно, что «Начала» Евклида начинаются описанием построения правильного треугольника и заканчиваются изучением пяти платоновых тел. Заметим, что платоновым телам посвящена заключительная, то есть тринадцатая книга «Начал» Евклида. Кстати, этот факт, то есть размещение теории правильных многогранников в заключительной (как бы самой главной) книге «Начал» Евклида, дало основание древнегреческому математику Проклу, который был комментатором Евклида, выдвинуть интересную гипотезу об истинных целях, которые преследовал Евклид, создавая свои «Начала». Согласно Проклу, Евклид создавал «Начала» не с целью изложения геометрии, а чтобы дать полную систематизированную теорию построения «идеальных» фигур, в частности пяти *Платоновых тел*, попутно осветив некоторые новейшие достижения математики!

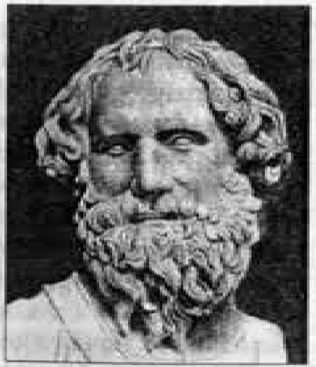
Не случайно один из авторов открытия фуллеренов, нобелевский лауреат Гарольд Крото, в своей нобелевской лекции начинает рассказ о симметрии как «основе нашего восприятия физического мира» и ее «роли в попытках его всестороннего объяснения» именно с платоновых тел и «элементов всего сущего»:

> «Понятие структурной симметрии восходит к античной древности... Наиболее известные примеры можно, конечно, обнаружить в диалоге «Тимей» Платона, где в разделе 53, относящемся к «Элементам», он пишет: "Во-первых, каждому (!), разумеется, ясно, что огонь и земля, вода и воздух суть тела, а всякое тело — сплошное" (!!) Платон обсуждает проблемы химии на языке этих четырех элементов и связывает их с четырьмя платоновыми телами (в то время только четырьмя, пока Гиппарх не открыл пятый — додекаэдр). Хотя на первый взгляд такая философия может показаться несколько наивной, она указывает на глубокое понимание того, каким образом в действительности функционирует Природа».

3.2. Архимедовы тела

Архимедовы тела

Известно еще множество совершенных тел, получивших название *архимедовых* или *полуправильных* многогранников. У них также все многогранные углы равны и все грани — правильные многоугольники, но несколько разных типов. Есть 13 полуправильных многогранников, открытие которых приписывается Архимеду.



Архимед (287–212 годы до н. э.)

Множество *архимедовых тел* можно разбить на несколько групп. Первую из них составляют пять многогранников, которые получаются из *платоновых тел* в результате их *усечения*. Усеченное тело — это тело с отрезанной верхушкой. Для Платоновых тел усечение может быть сделано таким образом, что и получающиеся новые грани, и остающиеся части старых будут правильными многоугольниками. К примеру, *тетраэдр* (рис. 3.1, *а*) можно усечь так, что его четыре треугольные грани превратятся в четыре гексагональные, и к ним добавятся еще четыре правильные треугольные грани. Так могут быть получены пять архимедовых тел: *усеченный тетраэдр, усеченный гексаэдр (куб), усеченный октаэдр, усеченный додекаэдр* и *усеченный икосаэдр* (рис. 3.2 и рис. 25 на цветной вклейке).

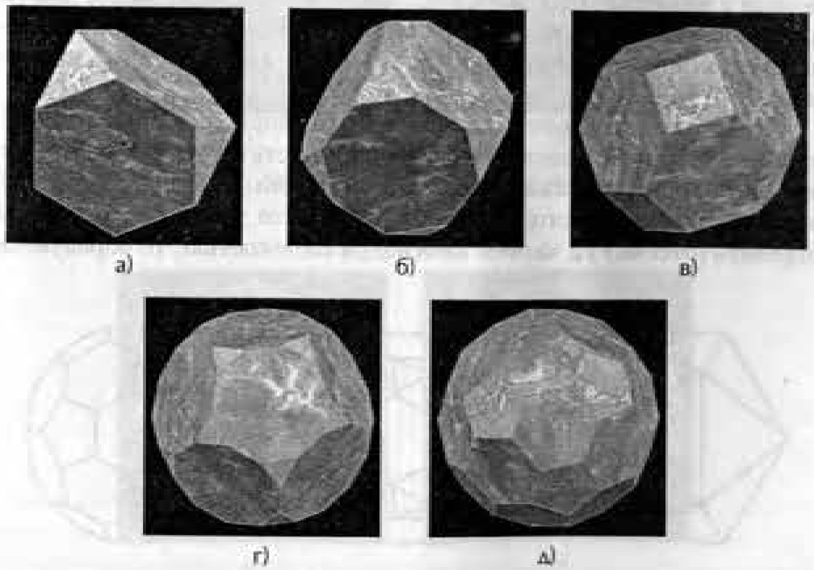


Рис. 3.2. Архимедовы тела: а) — усеченный тетраэдр, б) — усеченный куб, в) — усеченный октаэдр, г) — усеченный додекаэдр, д) — усеченный икосаэдр

В своей нобелевской лекции американский ученый Смолли, один из авторов экспериментального открытия фуллеренов, говорит об Архимеде (287–212 годы до н. э.) как о первом исследователе усеченных многогранников, в частности *усеченного икосаэдра*, правда, оговариваясь, что, возможно, Архимед присваивает себе эту заслугу и, возможно, икосаэдры усекали задолго до него. Достаточно упомянуть найденные в Шотландии и датированные примерно 2000 годом до н. э. сотни каменных предметов (по всей видимости, ритуального назначения) в форме сфер и различных многогранников (тел, ограниченных со всех сторон плоскими гранями), включая икосаэдры и додекаэдры. Оригинальная работа Архимеда, к сожалению, не сохранилась, и ее результаты дошли до нас, что называется, из вторых рук. Во времена Возрождения все архимедовы тела одно за другим были «открыты» заново. В конце концов Кеплер в 1619 году в своей книге «Мировая гармония» *(Harmonice Mundi)* дал исчерпывающее описание всего набора архимедовых тел — многогранников, каждая грань которых представляет собой *правильный многоугольник*, а все вершины находятся в эквивалентном положении (как атомы углерода в молекуле C_{60}). Архимедовы тела состоят не менее чем из двух различных типов многоугольников, в отличие от 5 платоновых тел, все грани которых одинаковы (как в молекуле C_{20}, например).

Итак, как же сконструировать архимедов усеченный икосаэдр из платонова икосаэдра? Ответ иллюстрируется с помощью рис. 3.3. Действительно, как видно из табл. 3.1, в любой из 12 вершин икосаэдра сходятся 5 граней. Если у каждой вершины отрезать (отсечь) 12 частей икосаэдра плоскостью, то образуется

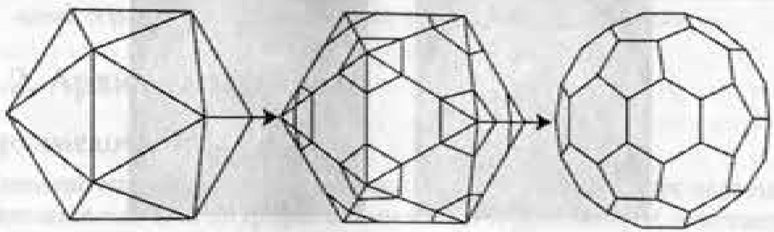
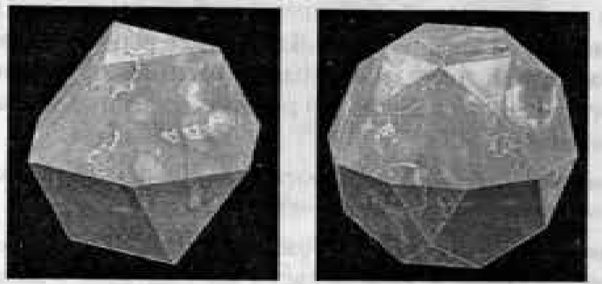


Рис. 3.3. Конструирование архимедова усеченного икосаэдра из платонова икосаэдра

12 новых пятиугольных граней. Вместе с уже имеющимися 20 гранями, превратившимися после такого отсечения из треугольных в шестиугольные, они составят 32 грани усеченного икосаэдра. При этом ребер будет 90, а вершин 60.

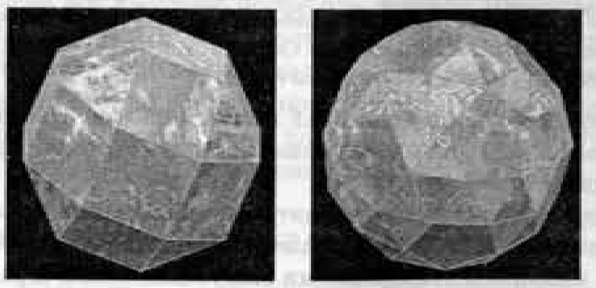
Другую группу архимедовых тел составляют два тела, именуемые *квазиправильными* многогранниками. Частица «квази» подчеркивает, что грани этих многогранников представляют собой правильные многоугольники всего двух типов, причем каждая грань одного типа окружена многоугольниками другого типа. Эти два тела носят название *кубооктаэдр* и *икосододекаэдр* (рис. 3.4 и рис. 26 на цветной вклейке).

Два следующих архимедовых тела — *ромбокубооктаэдр* и *ромбоикосододекаэдр* (рис. 3.5 и рис. 27 на цветной вклейке).



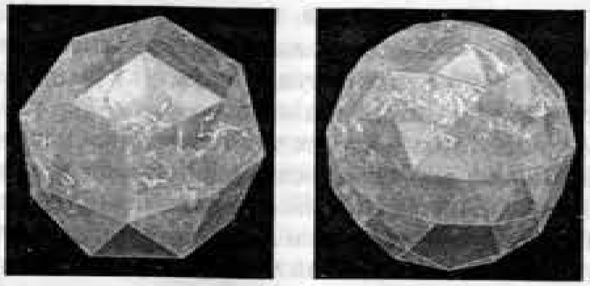
а) б)

Рис. 3.4. Архимедовы тела: а) — кубооктаэдр, б) — икосододекаэдр



а) б)

Рис. 3.5. Архимедовы тела: а) — ромбокубооктаэдр, б) — ромбоикосододекаэдр



а) б)

Рис. 3.6. Архимедовы тела: а) — курносый куб, б) — курносый додекаэдр

Наконец, существуют две так называемые «курносые» модификации — одна для куба (*курносый куб*), другая — для додекаэдра (*курносый додекаэдр*) (рис. 3.6 и рис. 28 на цветной вклейке).

В упомянутой книге Веннинджера «Модели многогранников» (1974) читатель может найти 75 различных моделей правильных многогранников.

«Теория многогранников, в частности выпуклых многогранников, — одна из самых увлекательных глав геометрии».

Таково мнение русского математика Л. А. Люстернака, много сделавшего именно в этой области математики. Развитие этой теории связано с именами выдающихся ученых. Большой вклад в развитие теории многогранников внес Иоганн Кеплер (1571–1630). В свое время он написал этюд «О снежинке», в котором высказал такое замечание:

«Среди правильных тел самое первое, начало и прародитель остальных — куб, а его, если позволительно так сказать, супруга — октаэдр, ибо у октаэдра столько углов, сколько у куба граней».

Кеплер первым опубликовал полный список тринадцати *архимедовых тел* и дал им те названия, под которыми они известны поныне.

Кеплер первым начал изучать так называемые *звездчатые многогранники*, которые, в отличие от платоновых и архимедовых тел, являются правильными выпуклыми многогранниками. В начале XIX века французский математик и механик Л. Пуансо (1777–1859), геометрические работы которого посвящены звездчатым многогранникам, открыл существование еще двух видов

правильных невыпуклых многогранников. Итак, благодаря работам Кеплера и Пуансо стали известными четыре типа таких фигур (рис. 3.7). В 1812 году О. Коши доказал, что других правильных звездчатых многогранников не существует.

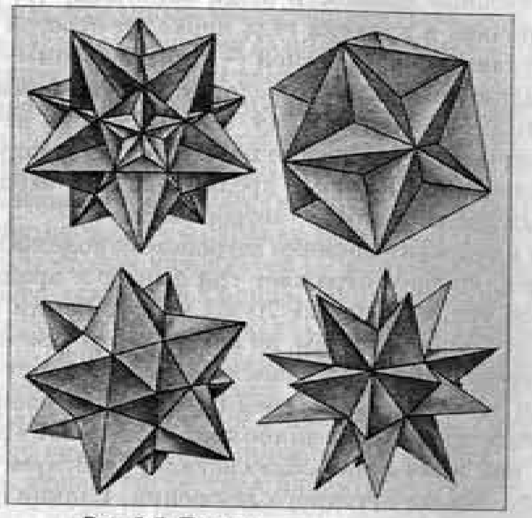


Рис. 3.7. Правильные звездчатые многогранники (тела Пуансо)

У многих читателей может возникнуть вопрос: «А зачем вообще изучать правильные многогранники? Какая от них польза?» На этот вопрос можно ответить: «А какова польза от музыки или поэзии? Разве все красивое полезно?» Модели многогранников, приведенные на рис. 3.1–3.7, доставляют нам эстетическое удовольствие и могут использоваться в качестве декоративных украшений. Кроме того, широкое проявление правильных многогранников в природных структурах послужило причиной огромного интереса к этому разделу геометрии в современной науке.

3.3. Тайна египетского календаря

Что такое календарь?

Русская пословица гласит: «Время — око истории». Все, что существует во Вселенной, — Солнце, Земля, звезды, планеты, известные и неизвестные миры, и все, что есть в природе живого и неживого, — все имеет пространственно-временное измерение. Время измеряется путем наблюдения периодически повторяющихся процессов определенной длительности.

Еще в глубокой древности люди заметили, что день всегда сменяется ночью, а времена года проходят строгой чередой: за зимой наступает весна, за весной — лето, за летом — осень. В поисках разгадки этих явлений человек обратил внимание на небесные светила — Солнце, Луну, звезды — и на неукоснительную периодичность их перемещения по небосводу. Это были первые наблюдения, которые предшествовали зарождению одной из самых древних наук — астрономии.

В основу измерения времени астрономия положила движение небесных тел, которое отражает три фактора: вращение Земли вокруг своей оси, обращение Луны вокруг Земли и движение Земли вокруг Солнца. От того, на каком из этих явлений основывается измерение времени, зависят и разные понятия времени. Астрономия знает *звездное* время, *солнечное* время, *местное* время, *поясное* время, *декретное* время, *атомное* время и т. д.

Солнце, как и все остальные светила, участвует в движении по небосводу. Кроме суточного движения, Солнце обладает так называемым годичным движением, а весь путь годичного движения Солнца по небосводу называется *эклиптикой*. Если, например, заметить расположение созвездий в какой-нибудь определенный вечерний час, а затем повторять это наблюдение через каждый месяц, то перед нами предстанет иная картина неба. Вид звездного неба изменяется непрерывно: каждому времени года свойственна своя картина вечерних созвездий и каждая такая картина через год повторяется. Следовательно, по истечении года Солнце относительно звезд возвращается на прежнее место.

Для удобства ориентировки в звездном мире астрономы разделили весь небосвод на 88 созвездий. Каждое из них имеет свое наименование. Из 88 созвездий особое место в астрономии занимают те, через которые проходит эклиптика. Эти созвездия кроме собственных имен имеют еще обобщенное название — *зодиакальные* (от греч. *zoop* — животное), а также широко известные во всем мире символы (знаки) и разнообразные аллегорические изображения, вошедшие в календарные системы.

Известно, что в процессе перемещения по эклиптике Солнце пересекает 13 созвездий. Однако астрономы сочли нужным разделить путь Солнца не на 13, а на 12 частей, объединив созвездия Скорпиона и Змееносца в единое — под общим названием Скорпиона.

Проблемами измерения времени занимается специальная наука, называемая *хронологией*. Она лежит в основе всех календарных систем, созданных человечеством. Создание календарей в древности являлось одной из важнейших задач астрономии.

Что же такое календарь и какие существуют системы календарей? Слово «календарь» происходит от латинского слова *calendarium*, что буквально означает «долговая книга»; в таких книгах указывались первые дни каждого месяца — *календы*, в которые в Древнем Риме должники платили проценты.

С древнейших времен в странах Восточной и Юго-Восточной Азии при составлении календарей большое значение придавали периодичности движения Солнца, Луны, а также *Юпитера* и *Сатурна*, двух гигантских планет Солнечной системы. Есть основание предполагать, что идея создания *юпитерианского календаря* с небесной символикой 12-летнего животного цикла связана с вращением Юпитера вокруг Солнца, который делает полный оборот вокруг Солнца примерно за 12 лет (11,862). С другой стороны, вторая гигантская планета Солнечной системы — *Сатурн* делает полный оборот вокруг Солнца примерно за 30 лет (29,458). Желая согласовать циклы движения гигантских планет, древние китайцы пришли к идее введения 60-летнего цикла Солнечной системы. В течение этого цикла Сатурн делает два полных оборота вокруг Солнца, а Юпитер — пять оборотов.

При создании годичных календарей используются астрономические явления: смена дня и ночи, изменение лунных фаз и смена времен года. Использование различных астрономических явлений привело к созданию у различных народов трех типов календарей: *лунных*, основанных на движении Луны, *солнечных*, основанных на движении Солнца, и *лунно-солнечных*.

Структура египетского календаря

Одним из первых солнечных календарей был *египетский*, созданный в IV тысячелетии до н. э. Первоначально египетский календарный год состоял из 360 дней. Год делился на 12 месяцев ровно по 30 дней в каждом. Однако позже было обнаружено, что такая длительность календарного года не соответствует астрономическому. И тогда египтяне добавили к календарному году еще

5 дней, которые, однако, не были днями месяцев. Это были 5 праздничных дней, соединявших соседние календарные годы. Таким образом, египетский календарный год имел следующую структуру: $365 = 12 \times 30 + 5$. Заметим, что именно египетский календарь является прообразом современного календаря.

Возникает вопрос: почему египтяне разделили календарный год на 12 месяцев? Ведь существовали календари с другим количеством месяцев в году. Например, в календаре майя год состоял из 18 месяцев по 20 дней в месяце.

Следующий вопрос, касающийся египетского календаря: почему каждый месяц имел ровно 30 дней (точнее, суток)? Можно задать некоторые вопросы и по поводу египетской системы измерения времени, в частности по поводу выбора таких единиц времени, как *час, минута, секунда.* Например, возникает вопрос: почему единица часа была выбрана таким образом, чтобы она ровно 24 раза укладывалась в сутки, то есть почему 1 сутки = 24 (2×12) часа? Далее, почему 1 час = 60 минут, а 1 минута = 60 секунд? Эти же вопросы относятся и к выбору единиц угловых величин, в частности, почему окружность разбита на 360°, то есть почему $2\pi = 360° = 12 \times 30°$? К этим вопросам добавляются и другие, в частности, почему астрономы признали целесообразным считать, что существует 12 *зодиакальных* знаков, хотя на самом деле в процессе своего движения по эклиптике Солнце пересекает 13 созвездий? И еще один «странный» вопрос: почему вавилонская система счисления имела весьма необычное основание — число 60?

Связь египетского календаря с числовыми характеристиками додекаэдра

Анализируя египетский календарь, а также египетские системы измерения времени и угловых величин, мы обнаруживаем, что в них с удивительным постоянством повторяются четыре числа: 12, 30, 60 и производное от них число $360 = 12 \times 30$. Возникает вопрос: не существует ли какой-то фундаментальной научной идеи, которая могла бы дать простое и логичное объяснение использованию этих чисел в египетских системах?

Для ответа на этот вопрос еще раз обратимся к додекаэдру, изображенному на рис. 3.4. Напомним, что все геометрические соотношения додекаэдра основаны на золотой пропорции.

Знали ли египтяне додекаэдр? Историки математики признают, что древние египтяне обладали сведениями о правильных многогранниках. Но знали ли они все пять правильных многогранников, в частности додекаэдр и икосаэдр как наиболее сложные из них? Древнегреческий математик Прокл приписывает построение правильных многогранников Пифагору. Но ведь многие математические теоремы и результаты (в частности, самую свою знаменитую теорему) Пифагор позаимствовал у древних египтян в период весьма длительной «командировки» в Египет (по некоторым сведениям, Пифагор прожил в Египте в течение 22 лет!). Поэтому мы можем предположить, что знание о правильных многогранниках Пифагор, возможно, также позаимствовал у древних египтян (а возможно, у древних вавилонян, потому что, согласно легенде, Пифагор прожил в древнем Вавилоне 12 лет).

Но существуют и другие, более веские доказательства того, что египтяне владели информацией о всех пяти правильных многогранниках. В частности, в Британском музее хранится игральная кость эпохи Птолемеев, имеющая форму *икосаэдра*, то есть платонова тела, дуального *додекаэдру*. Все эти факты дают нам право выдвинуть гипотезу о том, что *египтянам был известен додекаэдр.* И если это так, то из этой гипотезы вытекает весьма стройная система, позволяющая дать объяснение происхождению египетского календаря, а заодно и происхождению египетской системы измерения временных интервалов и геометрических углов.

Ранее мы установили, что додекаэдр имеет 12 граней, 30 ребер и 60 плоских углов на своей поверхности (табл. 3.1). Если исходить из гипотезы, что египтяне знали *додекаэдр* и его числовые характеристики 12, 30, 60, то каково же было их удивление, когда они обнаружили, что этими же числами выражаются циклы Солнечной системы, а именно 12-летний цикл Юпитера, 30-летний цикл Сатурна и, наконец, 60-летний цикл Солнечной системы. Таким образом, между такой совершенной пространственной фигурой, как *додекаэдр*, и Солнечной системой существует глубокая математическая связь! Такой вывод сделали античные ученые. Это и привело к тому, что додекаэдр был принят в качестве «главной фигуры», которая символизировала *гармонию мироздания.* И тогда египтяне решили, что все их главные системы (календарная система, система измерения времени, система измерения углов) должны соответствовать числовым параметрам додекаэдра!

Поскольку по представлению древних движение Солнца по эклиптике имело строго круговой характер, то, выбрав 12 знаков зодиака, дуговое расстояние между которыми равнялось ровно 30°, египтяне удивительно красиво согласовали годичное движение Солнца по эклиптике со структурой своего календарного года: *один месяц соответствовал перемещению Солнца по эклиптике между двумя соседними знаками зодиака!* Более того, перемещение Солнца на один градус соответствовало одному дню в египетском календарном году! При этом эклиптика автоматически получалась разделенной на 360°. Разделив каждые сутки на две части, следуя додекаэдру, египтяне затем каждую половину суток разделили на 12 частей (12 граней додекаэдра) и тем самым ввели *час* — важнейшую единицу времени. Разделив один час на 60 минут (60 плоских углов на поверхности додекаэдра), египтяне таким путем ввели *минуту* — следующую важную единицу времени. Точно так же они ввели *секунду* — наиболее мелкую на тот период единицу времени.

Таким образом, выбрав додекаэдр в качестве главной «гармонической» фигуры мироздания и строго следуя числовым характеристикам додекаэдра 12, 30, 60, египтянам удалось построить чрезвычайно стройный календарь, а также системы измерения времени и угловых величин. Эти системы полностью согласовывались с их «теорией гармонии», основанной на золотой пропорции, поскольку именно эта пропорция лежит в основе додекаэдра.

Вот такие удивительные выводы вытекают из сопоставления додекаэдра с Солнечной системой. И если наша гипотеза правильна (пусть кто-нибудь попытается ее опровергнуть), то отсюда следует, что вот уже много тысячелетий человечество живет *под знаком Золотого сечения*! И каждый раз, когда мы смотрим на циферблат наших часов, который также построен на использовании числовых характеристик додекаэдра 12, 30 и 60, мы прикасаемся к главной тайне мироздания — Золотому сечению, сами того не подозревая!

О календаре майя

Известно, что календарный год в календаре майя имел следующую структуру: 1 год = 360 + 5 = 20 × 18 + 5 дней, откуда вытекает, что год майя разделили на 18 месяцев по 20 дней в каждом. Числа 20 и 360 были использованы майя в качестве «узловых» чисел своей системы счисления. Однако структура календарного

года майя была подобна структуре египетского календарного года: 1 год = 360 + 5 = 12 × 30 + 5 дней, в котором числа 12 и 30 были числами додекаэдра. Но что значит число 20 в календаре майя? Обратимся снова к икосаэдру и додекаэдру. В этих «сакральных» фигурах имеется еще одна «священная» числовая характеристика — число вершин, которое одно и то же для додекаэдра и икосаэдра и равно числу 20! Таким образом, древние майя, несомненно, использовали эту числовую характеристику додекаэдра и икосаэдра в своем календаре (разделив год на 20 месяцев) и в своей системе счисления (выбрав числа 20 и 360 в качестве «узловых» чисел своей системы счисления).

3.4. Додекаэдро-икосаэдрическая доктрина

Истоки икосаэдро-додекаэдрической доктрины

Согласно замечанию комментатора последнего издания сочинений Платона, у него «вся космическая пропорциональность покоится на принципе золотого деления, или гармонической пропорции». Как упоминалось, космология Платона основывается на правильных многогранниках, называемых *телами Платона*. Представление о «сквозной» гармонии мироздания неизменно ассоциировалось с ее воплощением в этих пяти правильных многогранниках, выражавших идею повсеместного совершенства мира. И то, что главная «космическая» фигура — додекаэдр, символизировавший тело мира и вселенской души, был основан на Золотом сечении, придавало последнему особый смысл, смысл главной пропорции мироздания.

Космология Платона стала основой так называемой *икосаэдро-додекаэдрической доктрины*, которая с тех пор красной нитью проходит через всю человеческую науку. Суть этой доктрины состоит в том, что *додекаэдр* и *икосаэдр* есть типичные формы природы во всех ее проявлениях, начиная с космоса и заканчивая микромиром.

Форма Земли

Вопрос о форме Земли занимал умы ученых с античных времен. И когда гипотеза о шарообразной форме Земли получила подтверждение, возникла идея о том, что по своей форме Земля представляет собой додекаэдр. Так, Сократ писал следующее.

«Земля, если взглянуть на нее сверху, похожа на мяч, сшитый из 12 кусков кожи».

Эта гипотеза Сократа нашла дальнейшее научное развитие в трудах физиков, математиков и геологов. Так, французский геолог *де Бимон* и известный математик *Пуанкаре* считали, что форма Земли представляет собой деформированный додекаэдр.

Российский геолог С. Кислицын также разделял мнение о додекаэдрической форме Земли. Он высказал гипотезу о том, что 400–500 миллионов лет назад геосфера додекаэдрической формы превратилась в геоикосаэдр. Однако такой переход оказался неполным и незавершенным, в результате чего геододекаэдр оказался вписанным в структуру икосаэдра.

Недавно московские инженеры В. Макаров и В. Морозов выдвинули еще одну интересную гипотезу, касающуюся формы Земли. Они считают, что ядро Земли имеет форму и свойства растущего кристалла, оказывающего воздействие на развитие всех природных процессов, идущих на планете. Лучи этого кристалла, а точнее, его силовое поле, обусловливают икосаэдро-додекаэдрическую структуру Земли, проявляющуюся в том, что в земной коре как бы проступают проекции вписанных в земной шар правильных многогранников — икосаэдра и додекаэдра. Их 62 вершины и середины ребер, называемых авторами *узлами*, обладают рядом специфических свойств, позволяющих объяснить некоторые непонятные явления.

В последние годы гипотеза об икосаэдро-додекаэдрической форме Земли была подвергнута проверке. Для этого ученые совместили ось додекаэдра с осью глобуса и, вращая вокруг нее этот многогранник, обратили внимание на то, что его ребра совпадают с гигантскими нарушениями земной коры (например, со Срединно-Атлантическим подводным хребтом). Взяв затем *икосаэдр* в качестве многогранника, они установили, что его ребра совпадают с более мелкими членениями земной коры (хребты, разломы и т. д.). Эти наблюдения подтверждают гипотезу о близости тектонического строения земной коры с формами додекаэдра и икосаэдра. Узлы гипотетического геокристалла являются как бы центрами определенных аномалий на планете: в них расположены все мировые центры экстремального атмосферного давления, районы зарождения ураганов; в одном из узлов икосаэдра (в Габоне) обнаружен «природный атомный реактор», еще работавший 1,7 миллиардов лет назад.

Во многим узлах многогранников находятся гигантские месторождения полезных ископаемых (например, Тюменское месторождение нефти), аномалии животного мира (озеро Байкал), центры развития культур человечества (Древний Египет, протоиндийская цивилизация Мохенджо-Даро, Северная Монгольская и т. п.). Все эти примеры подтверждают удивительную прозорливость Сократа.

Квинтэссенцией геометрических представлений о всем сущем стали работы американского исследователя Д. Винтера, возглавляющего группу «Планетарные сердцебиения». Он является проповедником идеала формы, унитарного «Золотого сечения», которое подобно «золотой цепи» соединяют ген и Вселенную. Принимая концепцию икосаэдрически-додекаэдрической формы Земли, Винтер развивает ее дальше. Он обращает внимание на то, что угол, описываемый осью вращения Земли в ходе ее прецессии за 26 000 лет, составляет 32°. Он в точности равен тому углу, под которым можно наклонить куб, чтобы, вращая его затем вокруг оси (с пятью остановками), получить додекаэдр. По мнению Винтера, энергетический каркас Земли представляет собой додекаэдр, вставленный в икосаэдр, который, в свою очередь, вставлен во второй додекаэдр. Геометрические отношения между указанными многогранниками представляет собой Золотое сечение.

Додекаэдрическая структура, по мнению Винтера, присуща не только энергетическому каркасу Земли, но и строению живого вещества. И самое, пожалуй, главное, что структура ДНК генетического кода жизни представляет собой четырехмерную развертку (по оси времени) вращающегося додекаэдра! Таким образом, оказывается, что вся Вселенная — от Метагалактики и до живой клетки — построена по одному принципу — бесконечно вписываемых друг в друга додекаэдра и икосаэдра, находящихся между собой в пропорции Золотого сечения!

3.5. Иоганн Кеплер: от «Мистерии» до «Гармонии»

Misterium Cosmographicum

Среди патриархов новоевропейской науки нет фигуры загадочнее, чем Иоганн Кеплер. Кажется, он соединил две эпохи не только своими творениями, но и самой своей личностью. С одной стороны, Кеплер — профессиональный астролог, фантазер и фантаст, чей стиль мышления был неприемлем как для творцов классической науки, включая Галилея и Ньютона, так и для ее историков, по крайней мере историков классической формации. С другой стороны, именно этот, почти средневековый по стилю мышления звездочет ввел в современную науку ее основные понятия. Современное, то есть механистическое, понимание *силы* авторы исторического словаря философии возводят к Кеплеру. Он же, оказывается, ввел в обиход слово *инерция*, отличающее нашу физику от всей прежней, а заодно и физическое понятие *энергии*, не говоря уже о том, что ему принадлежат первые количественные законы астрономии. Кеплер — учредитель *физики неба*. Это замечательное словосочетание входит в подзаголовок его основного сочинения: «Новая астрономия, основанная на причинах, или Физика неба».

Иоганн Кеплер родился в 1571 году в бедной протестантской семье. В 1591 году он поступил в Тюбингенскую академию, где получил хорошее математическое образование. Именно там будущий великий астроном познакомился с гелиоцентрической системой мира Николая Коперника. После окончания академии Кеплер получил степень магистра и затем был направлен преподавателем математики в гимназию города Грац (Австрия). Его первым астрономическим сочинением была небольшая книжечка со следующим названием: «Предвестник космографических исследований, содержащий тайну мироздания относительно чудесных пропорций между небесными кругами и истинных причин, числа и размеров небесных сфер, а также периодических движений, изложенных с помощью пяти правильных тел Иоганном Кеплером из Вюртемберга, математиком из достославной провинции Штирии». Сам он называл эту книгу, опубликованную в 1597 году, *Misterium Cosmographicum* («Тайна космографии»).


Иоганн Кеплер (1571–1630)

В одном из парков Граца имеется памятник Иоганну Кеплеру, рядом с которым находится эллипсовидная фигура, которая на-

поминает о его главном научном открытии — «законах Кеплера». Рядом с этим памятником Анна Слученкова и сфотографировала профессора Стахова в период их пребывания в Граце в 1996 году, где они принимали участие в работе 7-й Международной конференции «Числа Фибоначчи и их приложения».

Читая «Тайну космографии», не устаешь удивляться фантазии автора. Глубокое убеждение в существовании гармонии мира наложило отпечаток на все мышление Кеплера. Цель своих исследований, изложенных в «Тайне космографии», Кеплер сформулировал в предисловии:

> «Любезный читатель! В этой книжке я вознамерился доказать, что всеблагой и всемогущий Бог при сотворении нашего движущегося мира и при расположении небесных орбит избрал за основу пять правильных тел, которые со времен Пифагора и Платона и до наших дней снискали столь громкую славу, выбрал число и пропорции небесных орбит, а также отношения между движениями выбрал в соответствии с природой правильных тел. Сущность трех вещей — почему они устроены так, а не иначе — осо-

Профессор А. П. Стахов рядом с памятником Иоганну Кеплеру (Грац, июль 1996 года) бенно интересовали меня, а именно число, размеры и движения небесных орбит».

Раскрыть тайну мироздания значило, по Кеплеру, ответить на вопрос, который он сам же себе и поставил впервые в истории астрономии. Почему планет 6, а не 7 или 16, и почему радиусы их орбит такие, а не какие-то иные? Что именно Творец «имел в виду», останавливаясь на шести светилах? Новая идея озарила Кеплера весной 1595 года, когда объясняя школярам решение какой-то задачки, он нарисовал на доске равносторонний треугольник вместе с сопряженными с ним окружностями — вписанной и описанной. Вот эти-то концентрические фигуры и натолкнули Кеплера на новую идею. Размещением планетных орбит теперь управляет закон самой геометрии. На исходном круге строится треугольник, вокруг него снова описывается окружность, ее обнимает квадрат, затем снова окружность и так далее — с чередованием круговых и многоугольных форм. Следующее озарение, и теперь уже решающее — переход от плоских фигур к правильным многогранникам Платона, собранным в одну концентрическую форму. Это открытие и составило содержание его первой печатной работы.

Тайна космографии раскрыта! Ее сущность, по мнению Кеплера, состоит в следующем:

«Земля (орбита Земли) есть мера всех орбит. Вокруг нее опишем додекаэдр. Описанная вокруг додекаэдра сфера есть сфера Марса. Вокруг сферы Марса опишем тетраэдр. Описанная вокруг тетраэдра сфера есть сфера Юпитера. Вокруг сферы Юпитера опишем куб. Описанная вокруг тетраэдра сфера есть сфера Сатурна. В сферу Земли вложим икосаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Венеры. В сферу Венеры вложим октаэдр. Вписанная в него сфера есть сфера Меркурия».

Так выглядит первая формула новой астрономии — пока еще чисто стереометрическая. Впервые открыто разумное основание для порядка планетных орбит: возможность собрать воедино все платоновы тела — да так, чтобы они связали собой планетные сферы. Мыслимо только 5 платоновых тел, существует только 5 межпланетных пространств, и все они оказываются такими, чтобы все правильные многогранники в них разместились. Неужели это случайно?

Знаменитый «Космический кубок» Кеплера (рис. 3.8), вправляющий в платоновы тела хрустальные сферы, воплощает эту модель в материи. Самое драгоценное достояние античной гео-

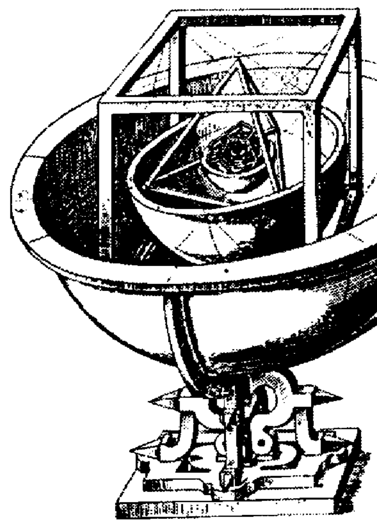


Рис. 3.8. «Космический кубок» — модель Солнечной системы Кеплера

метрии сопряжено, наконец, с пифагорейской астрономией. Теперь Кеплер вправе сказать, что постиг Вселенную так, как если бы создал ее собственными руками.

«Космографическую тайну» Кеплер посылает Галилею и Браге и от обоих получает положительные отзывы. Вооружившись ими, Кеплер устремляется ко двору вюртембергского герцога Фридриха в надежде получить средства на изготовление в серебре новой модели Вселенной — «Космического кубка». На полях прошения герцог повелевает изготовить ее поначалу из меди. Но на какие деньги? Астроном начинает вырезать и клеить модель из бумаги, чтобы через неделю неистовой работы бросить и ее.

Конечно, создание «Космического кубка» было большим успехом молодого астронома, он сделал Кеплеру имя, но это был успех неполный и отчасти даже сомнительный, а главное, не была достигнута основная научная цель. Кеплер и сам назвал свой первый научный труд не вестью о тайне мира, но лишь предвестием. «Космический кубок» обеспечивал ему доступ к бесценным наблюдательным данным, собранным в «Небесном замке» Тихо Браге. Кеплер ассистирует великому астроному при изучении Марса. Пользуясь этими данными, самыми точными в мире, он намерен отшлифовать новооткрытый Космос, ограненный платоновскими фигурами, до зеркального блеска. Надо лишь уточнить, как укладываются орбиты планет в очертания модели.

«Космический кубок» позволил Кеплеру прийти к важному выводу, раскрывающему «тайну мироздания»: Вселенная оказалась устроенной на основе единого геометрического принципа! Но радость оказалась преждевременной. При всей своей экзальтированности Кеплер был наделен всеми качествами, присущими настоящему ученому. Он понимал, что теория должна согласовываться с результатами наблюдений. Сдерживая восторг, охвативший его при мысли о своем столь чудесном открытии, Кеплер берется за проверку своей модели.

Единый геометрический принцип, вытекающий из «Космического кубка», позволил ученому дать ответ на два из трех поставленных им вопросов. Во-первых, Кеплер смог объяснить число известных тогда планет (с помощью 5 платоновых тел можно построить 6 сфер, откуда вытекает вывод о существовании 6 планет); во-вторых, он дал ответ на вопрос о расстоянии между планетами.

Ответ на третий вопрос (о движении планет) оказался наиболее трудным, и он был получен Кеплером много лет спустя.

Открытие первых двух законов Кеплера

Модель Кеплера (рис. 3.8) основывалась на предположении о сферическом характере движения планет. Получив в свое распоряжение данные многолетних наблюдений знаменитого астронома-наблюдателя Тихо Браге и проведя собственные наблюдения, Кеплер убедился в необходимости отвергнуть астрономические построения как своих предшественников, Птолемея и Коперника, так и собственные. Тщательно наблюдая орбиты планет, он приходит к следующему заключению:

> «О том, что движения планет кругообразны, свидетельствует их непрестанная повторяемость. Разум, извлекающий эту истину из опыта, сразу же заключает отсюда, что планеты обращаются по идеальным кругам, ибо среди плоских фигур — круг, среди пространственных тел — небесная сфера считаются совершеннейшими. Однако при более внимательном рассмотрении оказывается, что опыт учит несколько иному, а именно: орбиты планет отличаются от простых кругов».

Итоги этой работы изложены в главном сочинении Кеплера «Новая астрономия, основанная на причинах, или физика неба», написанном в 1606 году. Над этой книгой Кеплер работал с небольшими перерывами с 1600 по 1606 год. Значение этой книги состоит прежде всего в том, что в ней дан вывод двух из трех знаменитых законов движения планет, названных его именем. В этой работе впервые установлено, что орбита каждой планеты есть эллипс, в одном из фокусов которого расположено Солнце (*первый закон Кеплера*), и что площади, заметаемые радиус-векторами планет за равные промежутки времени, остаются постоянными (*второй закон Кеплера*).

Это первые количественные законы астрономии, значение которых для становления астрономии до сих пор не оценено в должной мере. Пытаясь воплотить свою сферику, Кеплер обнаруживает, что орбиты планет — не круги, а их движения неравномерны. И этот первый, качественный еще результат важнее количественного. Ибо он разрушает основания не только всех известных астрономических систем, но и всей предшествующей космологии. Конечно, эти революционные идеи не были восприняты его современниками. Достаточно сказать, что даже такой величайший гений, как Галилей, так и не смог принять законов Кеплера.

Другие открытия Кеплера

Однако открытие новых астрономических законов, сделанное Кеплером в 1606 году, не является единственным достижением ученого в тот период. Попутно он делает еще ряд научных открытий, каждого из которых достаточно, чтобы увековечить его имя.

В 1611 году Кеплер публикует книгу «Диоптрика», которая, по сути, явилась первым изложением *оптики* как науки. В этой книге Кеплер подробно описывает преломление света и открывает *законы геометрической оптики*. Глубокое понимание этих законов привело Кеплера к схеме *телескопической подзорной трубы*, изготовленной в 1613 году Кристофом Шайнером.

Задачи из «Новой астрономии» были лишь первым его шагом в развитии математики переменных величин. Следующим шагом была книга «Новая стереометрия винных бочек... с присоединением дополнения к архимедовой стереометрии». Книга вышла в Линце в 1615 году, но написана она была почти на два года раньше, и к ее написанию был весьма любопытный повод, известный со слов самого Кеплера.

19—2391

Осенью 1613 года в Верхней Австрии был собран особенно обильный урожай винограда. Многочисленные суда и баржи, груженные вином, уходили вверх по Дунаю, а пристань в Линце все еще была забита бочками. Кеплер решил запастись приятным напитком. Бочки с вином были доставлены к нему на двор, а затем появился купец и с помощью единственного инструмента — мерной линейки, стержня с делениями, быстро измерил количество вина в каждой из бочек без всяких вычислений и учета формы бочек. Он вставлял линейку в наливное отверстие бочки вплоть до упора в нижний край днища, после чего объявлял количество амфор (сосудов, принятых за меру емкости) в ней. Кеплер был очень удивлен: каким образом наклонный отрезок между двумя определенными точками может служить мерой вместимости бочки. Именно это наблюдение подтолкнуло Кеплера к проведению фундаментального математического исследования в этой области. Осенью 1615 года «Новая стереометрия винных бочек» — первая книга, напечатанная в Линце, поступила в продажу на ярмарке в крупнейшем тогдашнем центре книготорговли — Франкфурте.

Историческое значение этой книги для развития математики состоит в том, что в этой книге Кеплер предвосхищает *основы дифференциального исчисления*. Считается, что именно эта книга положила начало целому потоку исследований, увенчавшихся в последней четверти XVII века оформлением в трудах Ньютона и Лейбница *дифференциального и интегрального исчисления*.

Harmonies Mundi

Главным открытием, которое ждало ученого впереди, был *третий закон Кеплера*, который он сформулировал в книге *Harmonies Mundi* («Гармонии мира»).

Первые два закона Кеплера не дают ответа еще на один важнейший вопрос астрономии. По какому закону изменяются расстояния от Солнца до планет? Дело осложнялось тем, что расстояние от планеты до Солнца непостоянно, и Кеплер пытается нащупать новый принцип для решения сложной задачи. И здесь на помощь пришли философские убеждения Кеплера, восходящие к Пифагору и Платону. По глубокому убеждению Кеплера, природа была сотворена Творцом на основе не только математических, но и гармонических принципов. Он верил в «музыку сфер», чьи чарующие мелодии запечатлены не в звуках, а в движениях планет, способных рождать гармонические созвучия.

Астроном постулирует, что из всех возможных параметров подвижного космоса, связывающих движение планет, Бог выбрал такие, которые соответствуют музыкальным интервалам. Идея не нова, но только Кеплер решился ее проверить в надежде вывести из нее законы астрономии. На этот раз он прямо выводит их из устройства души, полагая, что та «движется по тем же законам, по которым доходит до ее обиталища свет от окружающих ее светил небесных».

Какие же из бесконечного множества возможных сочетаний лучей душа воспринимает как музыкальные? Кеплер постулирует, что «действенный» угол между световыми лучами соответствует либо правильным многоугольникам, сплошь покрывающим площадь, либо звездообразным фигурам, порожденным правильными многогранниками. Эти углы он представляет, с одной стороны, как разбиения окружности, а с другой — как интервалы звукоряда. И он решает эту грандиозную (по количеству вычислений) задачу, получив 7 гармонических интервалов.

> «Эти 7 делений струны я нашел, сначала руководствуясь слухом... в пределах одной октавы, и лишь затем не без труда вывел... из глубочайших оснований геометрии».

Книгу «Мировая гармония» занимает особое место в истории науки прежде всего потому, что содержит *третий закон Кеплера*, в котором нашли окончательное воплощение его размышления о числе, расстояниях, временах обращения и скоростях планет. Свое открытие Кеплер выражает следующими словами:

> «Отношение между периодами обращения каких-нибудь двух планет в точности равно полуторному отношению их средних расстояний, или радиусов их орбит».

Это именно тот закон, который Кеплер, по его собственным словам, предсказал двадцатью двумя годами раньше, когда открыл соотношение небесных тел с пятью платоновыми телами, и на который намекал самим названием своего первого сочинения «Космографическая тайна».

Русский биограф Кеплера Е. А. Предтеченский (1860–1904) пишет:

> «Царящая в мире чудная гармония понималась Кеплером не в отвлеченном только смысле благоустройства, а звучала в его поэтической душе на-

стоящей музыкой, которую мы могли бы понять не иначе, как совершенно войдя в круг его идей и проникшись его могучим энтузиазмом к дивному устройству мира и пифагорейским благоговением перед числовыми отношениями.

В самом деле, разве не удивительно,что "прекрасное" для слуха зависит от строгого численного соотношения, например, между длинами струн, производящих звуки, — соотношения, открытого Пифагором? Но в Кеплере, несомненно, обитала часть души Пифагора, и мудрено ли, что он усматривал числовые соотношения в открытом и объясненном им планетном космосе? Чтобы понять, насколько разнообразно содержание этой книги, достаточно сказать, что Кеплер касался в ней и социального вопроса, видя его решение в гармоническом распределении земных благ...»

Из своего открытия Кеплер делает следующий вывод: *«Таким образом, небесные движения суть не что иное, как ни на миг не прекращающаяся многоголосая музыка (воспринимаемая не слухом, но разумом)»*. Это итог, вершина жизни. Полученный результат преисполнил Кеплера такой радостью, что он разразился гимном во славу Творца:

> «Бесконечна мудрость Творца, безграничны слава и могущество Его. Вы, небеса, воспойте хвалу Ему! Солнце, Луна и планеты, славьте Его на своем неизъяснимом языке! Вы, небесные гармонии, постигшие Его чудесные творения, воспойте хвалу Ему! И ты, душа моя, восхвали Создателя! Им создано и в Нем существует все. То, что известно нам лучше всего, сотворено в Нем и в нашей суетной науке. Хвала, честь и слава Ему во веки веков!»

Так закончился драматический этап в развитии астрономии, который завершился открытием трех важнейших астрономических законов движения планет, законов Кеплера. А началась эта история с «Космического кубка», весьма оригинальной модели Солнечной системы, основанной на платоновых телах. Хотя эта модель в конечном счете оказалась ошибочной, Кеплер никогда не отказывался от нее и считал эту модель одним из своих высших научных достижений.

Уступая настояниям друзей, Кеплер на склоне лет предпринял второе издание своей первой книги «для пользы не только книготорговцев, но и ученых».

В предисловии к новому изданию, подводя итог своим исканиям, Кеплер писал, что все его достижения вдохновлены *Misterium Cosmographicum* с его «Космическим кубком».

> «Мне самому, в течение вот уже 25 лет работающему над преобразованием астрономии, главы этой книжки не раз освещали путь. Почти все астрономические труды, которые я опубликовал за это время, берут свое начало в той или иной главе моей первой работы...»

Жизнь в веках

Жизнь Кеплера — это пример научной самоотверженности, основанной на бесконечной вере в гармонию мироздания. Вся его жизнь — это борьба на два фронта. С одной стороны, борьба с нищетой и мучительным, почти невыносимым бытом нищего и многодетного «математика достославной провинции Штирии», сопровождаемая депрессией жены, нелепой смертью детей, обвинениями матери в колдовстве, тупостью единоверцев. С другой стороны, это невероятный по своей сложности и запутанный мир вычислений. Но именно «напряженные, непрестанные и кипучие размышления» — опора и остов всей его жизни.

Смерть (в 1630 году) прерывает работу Кеплера над последней его книгой *Somnium* («Сновидение») — первым научно-фантастическим романом о полете на Луну. Но о гармонии больше не было написано ни слова. Не было придирчивых проверок, не было новых гипотез. Кеплер пишет:

> «Мой мозг устает, когда я пытаюсь понять, что я написал, и мне уже трудно восстановить связь между рисунками и текстом, которую я сам когда-то нашел...»

Так закончилась драма. Со смертью Кеплера о его открытиях забывают. Даже мудрый Декарт о них не знает. Галилей не счел нужным прочесть его книги. Только у Ньютона законы Кеплера обретают новую жизнь. Но Ньютона гармония не интересовала. У него были уравнения. Пришли новые времена.

Кеплер завершает эпоху «научного романтизма», характерного для Возрождения, эпоху гармонии и Золотого сечения. Но с другой стороны, его научные сочинения стали началом новейшей науки, которая стала развиваться, начиная с трудов Рене Декарта, Галилео Галилея и Исаака Ньютона.

Со смертью Кеплера забывают о Золотом сечении, которое он считал одним из «сокровищ геометрии», сравнимым с теоремой Пифагора. И это странное забвение продолжается почти два столетия. Интерес к Золотому сечению вновь возрождается только в XIX столетии.

3.6. Резонансная теория Солнечной системы

Солнечная система как динамическая система

Солнечная система представляет собой нелинейную колебательную систему, состоящую из слабо связанных нелинейных осцилляторов-планет. Как указывается в замечательной книге механика Виктора Коробко «Золотая пропорция и проблемы гармонии систем» (1998), между частотами их обращений существует определенная соизмеримость (резонансность), которая выражается соотношением:

$$n_1\omega_1 + n_2\omega_2 + ... + n_i\omega_i + ... + n_k\omega_k = 0.$$

где ω_i — частота обращения i-й планеты; n_i — целые числа; $i = 1, 2, ..., k$; k — число планет.

Советский математик А. М. Молчанов около 40 лет назад высказал гипотезу: любая нелинейная система (независимо от природы — механическая, химическая, биологическая или любая другая) в результате эволюции должна выходить на особый синхронный колебательный режим, при котором частоты объектов становятся равными, кратными или находятся в рациональных отношениях. Молчановым также доказан замечательный факт: при сколь угодно слабых взаимодействиях между элементами динамической системы их взаимное влияние в ходе эволюции приведет эту систему в синхронный режим. Проведенные Молчановым вычисления частот планет в соответствии с высказанной им гипотезой показали, что расчетные частоты отличаются от реально наблюдаемых не более чем на 1,5 %. Это значит, что Солнечная система находится вблизи максимального резонансного состояния, которое является «неизбежным следствием ее эволюции и признаком ее эволюционной зрелости».

Исследования К. П. Бутусова

Советский астроном К. П. Бутусов сопоставил минимальные, средние и максимальные периоды обращений планет и периоды биений (разности частот обращений) для смежных планет со средним периодом обращения Земли, равным $T_3 = 1{,}00004$, умноженным на число золотой пропорции в степени n, где $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, ...$ При этом он получил ряд довольно точных совпадений. Например, средний период обращения Меркурия составляет 0,24084 года. Сопоставление со средним периодом обращения T_3, умноженным на -3-ю степень золотой пропорции τ^{-3} дает число 0,23608, что с высокой степенью точности совпадает с числом 0,24084. Аналогичное сопоставление максимального периода обращения Венеры, равного 0,61929 года, с числом $T_3 = 1{,}00004$, умноженным на число золотой пропорции в степени -1, дает число 0,61806, что также дает хорошее совпадение. Подобные сопоставления с другими планетами Солнечной системы также привели к хорошим совпадениям, откуда Бутусов заключил, что «частоты обращения планет и разности частот обращений образуют спектр с интервалом, равным золотой пропорции»!

Эти необычное исследование привело также Бутусова к выводу о том, что «спектр гравитационных и акустических возмущений, создаваемых планетами, представляют собой консонантный аккорд, наиболее совершенный с эстетической точки зрения».

Таким образом, в работе Бутусова идеи пифагорейцев и Кеплера о «музыке сфер» приобретают новое звучание и получают новое подтверждение. В заключение своей уникальной работы Бутусов делает замечание: видимо, только случайность не позволила Кеплеру, хорошо знакомому с Золотым сечением и знавшему наизусть все параметры планетных орбит, открыть эту закономерность.

Резонанс волн биения

Как показали исследования Молчанова, Солнечная система находится вблизи максимального резонансного состояния, которое и обеспечивает устойчивость Солнечной системы. Это состояние соответствует минимуму потерь энергии, связанных с возбуждением акустических волн в облаке диффузионной материи. Наиболее интенсивное возмущение вызывают частоты биений, создаваемых соседними планетами. Условие резонанса волн биения соседних планет заключается в целочисленных соотношениях между периодами волн биений и волн основного тона планет, то есть

$$kT_\delta = nT_1 \pm mT_2, \qquad (3.1)$$

где T_1, T_2 — периоды обращения соседних планет; T_δ — период волны биения; k, n, m — некоторые целые числа.

Период биения планет связан с периодами обращения планет следующим соотношением:

$$\frac{1}{T_{\text{Б}}} = \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}. \qquad (3.2)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи уравнения (3.1).

$k = 0$. Этот случай соответствует условию:

$$nT_1 \pm mT_2 = 0, \qquad (3.3)$$

которое часто рассматривается в специальной литературе как условие резонанса.

$k = n = m$. Из уравнения (3.1) с учетом (3.2) находим:

$$\frac{T_1 T_2}{T_2 - T_1} = T_2 \pm T_1;$$

$$(T_1 T_2 - T_1)(T_2 \pm T_1),$$

откуда следует:

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)\left(\frac{T_2}{T_1} \pm 1\right). \qquad (3.4)$$

Если обозначить отношение периодов обращения соседних планет через x, то есть $T_2/T_1 = x$, то уравнение (3.4) может быть представлено в виде:

$$x = (x - 1)(x \pm 1). \qquad (3.5)$$

При использовании знака «+» в уравнении (3.5) оно вырождается в следующее уравнение.

$$x^2 = x + 1. \qquad (3.6)$$

Уравнение (3.6) есть не что иное, как уравнение золотой пропорции, рассмотренное в разделе 1.3. Как известно, положительный корень этого уравнения совпадает с золотой пропорцией:

$$x_1 = \tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}618. \qquad (3.7)$$

При использовании знака «–» в уравнении (3.5) оно вырождается в следующее уравнение.

$$x^2 = 3x - 1. \qquad (3.8)$$

Легко доказать, что положительный корень уравнения (3.8) равен квадрату золотой пропорции, то есть

$$x_1 = \tau^2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 2{,}618. \qquad (3.9)$$

Таким образом, из проведенных рассуждений вытекает, что отношения периодов обращения соседних планет, находящихся в состоянии резонанса, могут быть равны либо золотой пропорции 1,618, либо ее квадрату 2,618. И это действительно наблюдается в Солнечной системе. Например, отношение среднего периода вращения Земли $T_З = 1{,}00004$ к максимальному периоду вращения Венеры $T_В = 0{,}61929$ равно 1,615, что очень близко к золотой пропорции 1,618; отношение минимального периода обращения Марса $T_М = 1{,}62072$ к среднему периоду обращения Земли $T_З = 1{,}00004$ равно 1,62; отношение минимального периода обращения Урана $T_У = 78{,}1403$ к среднему периоду обращения Сатурна $T_С = 29{,}4577$ равно 2,65, что можно считать близким к квадрату золотой пропорции 2,618 и т. д. Таким образом, экспериментальные данные подтверждают, что золотая пропорция действительно является фундаментальной физической константой Солнечной системы.

3.7. Икосаэдр как главный геометрический объект математики

Феликс Клейн

Феликс Клейн (1849–1925)

Среди пяти платоновых тел икосаэдр и додекаэдр занимают особое место. В платоновой космологии *икосаэдр* символизировал воду, а *додекаэдр* — гармонию мироздания. Эти два платоновых тела непосредственно связаны с *пентаклом*, а через него — с золотой пропорцией. Додекаэдр и икосаэдр лежат в основе так называемой *додекаэдро-икосаэдрической доктрины*, которая пронизывает историю всей человеческой культуры, начиная от Пифагора и Платона. Наверное, нельзя считать случайным, что эта доктрина получила неожиданное развитие в трудах выдающегося немецкого математика Феликса Клейна (1849–1925).

Феликс Клейн родился в Дюссельдорфе в 1849 году. В 1865-м он поступает в Боннский университет. В 1872-м Клейн работает в Эрлангене, с 1875-го — профессор высшей технической школы в Мюнхене, с 1880-го — профессор университета в Лейпциге. В 1886-м он переехал в Геттинген, где возглавил математический институт Геттингенского университета, который на протяжении первой четверти XX века был признанным мировым математическим центром. Основные работы Клейна посвящены неевклидовой геометрии, теории непрерывных групп, теории алгебраических уравнений, теории эллиптических функций, теории автоморфных функций. Свои идеи в области геометрии Клейн изложил в работе «Сравнительное рассмотрение новых геометрических исследований» (1872), известной под названием *Эрлангенская программа*.

По Клейну, каждая геометрия является теорией инвариантов специальной группы преобразований. Расширяя или сужая группу, можно перейти от одного типа геометрии к другому. Евклидова геометрия — это наука об инвариантах метрической группы, проективная геометрия — об инвариантах проективной группы. Классификация групп преобразований дает нам классификацию геометрий. Существенным достижением Клейна является доказательство непротиворечивости неевклидовой геометрии.

Исследуя дискретные группы, Клейн рассмотрел группы симметрий правильных многогранников. Он стремился раскрыть внутренние связи между отдельными ветвями математики: с одной стороны, физикой, и техникой, с другой. Клейн много сделал для создания «Энциклопедии математических наук». В течение почти сорока лет (с 1876 года) он был главным редактором журнала «Математические анналы». Умер Клейн в 1925 году.

«Элементарная математика с точки зрения высшей»

Феликс Клейн был не только выдающимся математиком-теоретиком, но и выдающимся популяризатором математики и реформатором школьного математического образования. Перед Первой мировой войной он организовал комиссию по реорганизации преподавания математики. Именно проблеме школьного математического образования посвящена его книга «Элементарная математика с точки зрения высшей», переведенная на русский язык.

Старая немецкая гимназия (школа филологических наук) давала своим воспитанникам очень скудные сведения по математике и естествознанию. Математика XIX века принесла с собой ряд замечательных идей, которые наложили глубокий отпечаток на все отрасли знания и техники.

Поднять роль естественно-математического образования — таково было требование реформаторов, возглавляемых Клейном. Реформа математического образования, за проведение которой боролись Феликс Клейн и его последователи, была направлена на то, чтобы обновить застывший курс математики, сделать его более современным, включающим новые идеи и достижения науки.

Согласно Клейну, основную роль в курсе математики средней школы должно играть понятие *функции*. Оно должно быть освоено учащимися очень рано и должно пронизывать все преподавание алгебры и геометрии. Изучение функций, их возрастания и убывания приводит к понятию *производной*. Это вызывает следующее требование Клейна: *в программу средней школы должны быть введены начала математического анализа*. Основные понятия дифференциального и интегрального исчислений играют важную роль во всех отраслях и приложениях математики, обойтись без них невозможно.

Наконец, по мнению Клейна, на первых ступенях преподавания надо ограничить число логических рассуждений; нужно как можно больше наглядных представлений, возможно большее число примеров из повседневной жизни.

Итак, отказ от господства «филологической школы» в пользу изучения естествознания и математики, углубление связи между теоретической и прикладной математикой, введение в преподавание математики функционального мышления и начал математического анализа, а также наглядное обучение и прежде всего широкое применение графических методов — вот те принципы, которые Клейн и его последователи считали необходимыми положить в основу преподавания математики в школе. И надо признать, что идеи Клейна являются весьма актуальными и в настоящее время.

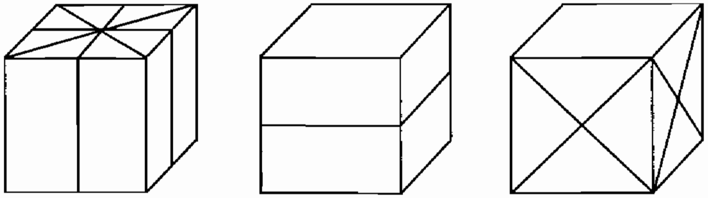
Группы симметрий правильных многогранников

Особенно велико влияние идей *Эрлангенской программы* Клейна на преподавание геометрии в школе. Сейчас хорошо известно, что традиционные «школьные» геометрические задачи на доказательство могут решаться не только идущими от Евклида методами, но также применением геометрических преобразований, и в первую очередь движений. Именно такие решения, связанные с движениями и использующие, в частности, соображения симметрии, наиболее важны для развития «геометрического видения».

Влияние «группового подхода» Клейна можно проследить по всем темам школьной геометрии. Каждая фигура F определяет некоторую группу движений; эта группа содержит все те движения, которые переводят фигуру F в себя и называется *группой самосовмещений* (или группу симметрий) фигуры F. Группа самосовмещений фигуры F во многом определяет геометрические свойства этой фигуры.

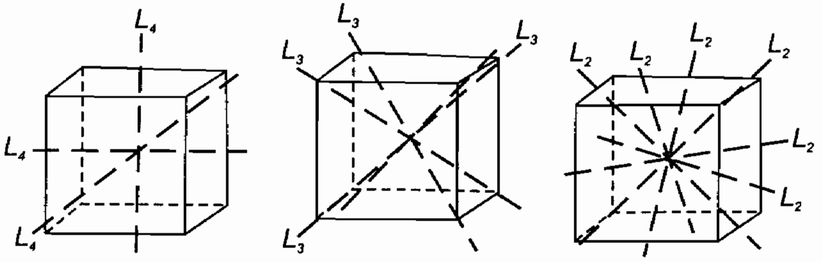
Раньше мы ввели некоторые основные понятия симметрии. Рассмотрим эти понятия на конкретных примерах. Начнем с *плоскости симметрии* P. Легко убедиться, что квадрат имеет четыре плоскости симметрии — $4P$, а в прямоугольнике можно провести только две плоскости симметрии — $2P$. Таким же образом обнаруживаются плоскости симметрии и для более сложных фигур. Нетрудно убедиться, что куб имеет 9 плоскостей симметрии (рис. 3.9), то есть $9P$.

Плоскость симметрии в природе проявляется очень часто. Выдающийся русский кристаллограф Г. В. Вульф (1863–1925) назвал плоскость симметрии «основным ключевым элементом симметрии».



а) б) в)

Рис. 3.9. Девять плоскостей симметрии куба



а) б) в)

Рис. 3.10. Оси симметрии куба:
а) — $3L_4$, б) — $4L_3$, в) — $6L_2$

Рассмотрим теперь второй тип элементов симметрии — *оси симметрии*. Наиболее наглядной иллюстрацией к понятию «ось симметрии» может служить граненый стакан в подстаканнике, в точности повторяющем форму вкладываемого в него стакана. Вынув стакан из такого подстаканника и вложив его обратно в повернутом положении, мы, по существу, выполняем операцию «самосовмещения». Количество всевозможных «самосовмещений», которые могут быть выполнены вокруг данной оси, называется ее *порядком*. Обычно ось симметрии обозначают буквой L, а ее порядок маленькой цифрой, стоящей вслед за этой буквой. Так, например, L_3 обозначает ось симметрии 3-го порядка. Ясно, что равносторонний треугольник имеет ось симметрии L_3, квадрат — L_4, пентаграмма — L_5, а круг имеет ось симметрии бесконечного порядка L_∞.

В качестве примера для демонстрации осей симметрии снова рассмотрим куб (рис. 3.10).

Перпендикулярно каждой паре граней куба через центры квадратов проходит четверная ось симметрии (рис. 3.10, *а*). Это означает, что куб имеет 3 оси симметрии четвертого порядка, то есть $3L_4$. Куб имеет 8 вершин. Через каждые противоположные пары вершин проходит тройная ось симметрии, которая совпадает с телесной диагональю куба (рис. 3.10, *б*). Это означает, что куб имеет 4 оси симметрии третьего порядка, то есть $4L_3$. В кубе имеется 12 ребер. Через середины каждой пары ребер, параллельно диагоналям граней, проходит двойная ось симметрии (рис. 3.9, *в*). Это означает, что куб имеет 6 осей симметрии 2-го порядка, то есть $6L_2$. Следовательно, полная характеристика осей симметрии куба такова: $3L_4$, $4L_3$, $6L_2$.

Существуют геометрические тела, имеющие оси симметрии бесконечного порядка L_∞. Такими осями симметрии обладают так называемые тела вращения, цилиндр, конус и т. д. Любой диаметр шара также представляет собой ось L_∞. Это означает, что шар имеет бесконечное множество осей симметрии бесконечного порядка, то есть ∞L_∞.

Рассмотрим теперь еще один элемент симметрии — центр симметрии. Ярким примером геометрической фигуры, имеющий центр симметрии, является куб.

Обычно для характеристики симметрии некоторого объекта приводится полная совокупность элементов симметрии. Например, группа симметрий снежинки имеет вид $L_6 6P$. Это означает, что снежинка имеет одну ось симметрии шестого порядка L_6, то есть может 6 раз «самосовмещаться» при повороте вокруг оси, и 6 плоскостей симметрии. Группа симметрий цветка ромашки, имеющего 24 лепестка, имеет вид $L_{24}24P$, то есть цветок имеет одну ось 24-го порядка и 24 плоскости симметрии. Суммируя все элементы симметрии, установленные для куба, приходим к следующей группе симметрий: $3L_4 4L_3 6L_2 9PC$.

Как мы уже знаем, куб является одним из пяти платоновых тел. В табл. 3.4 приведены группы симметрий всех платоновых тел.

Таблица 3.4. Группы симметрий платоновых тел

Многогранник	Форма граней	Симметрия
Тетраэдр	Равносторонние треугольники	$4L_3 3L_2 6P$
Куб	Квадраты	$3L_4 4L_3 6L_2 9PC$
Октаэдр	Равносторонние треугольники	$3L_4 4L_3 6L_2 9PC$
Додекаэдр	Равносторонние треугольники	$6L_5 10L_3 15L_2 15PC$
Икосаэдр	Правильные треугольники	$6L_5 10L_3 15L_2 15PC$

Анализ симметрий платоновых тел, который приведены выше в табл. 3.4, показывает, что группы симметрий куба и октаэдра, а также додекаэдра и икосаэдра совпадают. Это связано с тем, что додекаэдр дуален икосаэдру, а куб дуален октаэдру.

Роль икосаэдра в развитии математики

Кроме *Эрлангенской программы* и других выдающихся математических достижений, гениальность Феликса Клейна проявилась также в том, что более чем 100 лет назад он сумел предсказать выдающуюся роль платоновых тел, в частности икосаэдра, в будущем развитии науки, в частности математики. В 1884 году (запомним этот год) Феликс Клейн опубликовал еще одну книгу «Лекции об икосаэдре и решении уравнений пятой степени», посвященную геометрической теории икосаэдра.

Как известно, икосаэдр (а вместе с ним двойственный ему додекаэдр) занимают особое место в живой природе; форму икосаэдра имеют некоторые вирусы и радиолярии, то есть икосаэдральная форма и пентагональная симметрия являются фундаментальными в организации живого вещества.

В первой главе книги определено и объяснено место икосаэдра в математике. Согласно Ф. Клейну, ткань математики широко и свободно разбегается листами отдельных теорий. Но есть объекты, в которых сходятся несколько листов, — своеобразные точки ветвления. Их геометрия связывает листы и позволяет охватить общематематический смысл разных теорий. Именно таким математическим объектом, по мнению Клейна, является икосаэдр. *Клейн трактует икосаэдр как математический объект, из которого расходятся ветви пяти математических теорий: геометрия, теория Галуа, теория групп, теория инвариантов и дифференциальные уравнения.*

Таким образом, главная идея Клейна чрезвычайно проста: каждый уникальный геометрический объект так или иначе связан со свойствами икосаэдра.

В чем же состоит значение идей выдающегося математика с точки зрения теории гармонии? Прежде всего, в качестве объекта, объединяющего «главные листы» математики, выбрано «тело Платона» — икосаэдр, основанный на Золотом сечении. Отсюда естественным образом вытекает мысль, что именно Золотое сечение и является той главной геометрической идеей, которая, согласно Клейну, может объединить всю математику.

Современники Клейна не сумели по достоинству понять и оценить революционный характер «икосаэдрической» идеи Клейна. Ее значение было понято ровно через 100 лет, то есть только в 1984 году, когда израильский физик Дан Шехтман опубликовал заметку, подтверждающую существование специальных сплавов (названных квазикристаллами), обладающих так называемой икосаэдрической симметрией, то есть симметрией 5-го порядка, что строго запрещено классической кристаллографией.

Таким образом, еще в XIX веке гениальная интуиция Феликса Клейна привела его к мысли о том, что одна из древнейших геометрических фигур — *икосаэдр* — является главной геометрической фигурой математики. Тем самым Клейн в XIX веке вдохнул новую жизнь в развитие додекаэдро-икосаэдрического представления о структуре Вселенной, последователями которого были великие ученые и философы: Платон, построивший свою космологию на основе правильных многогранников, Евклид, посвятивший свои «Начала» изложению теории платоновых тел, Иоганн Кеплер, использовавший платоновы тела при создании своего «Космического кубка», весьма оригинальной геометрической модели Солнечной системы.

3.8. Правильные многогранники в природе и современной науке

Живая природа

В широко известной книге немецкого биолога начала XX века Э. Геккеля «Красота форм в природе» можно прочитать такие строки:

> «Природа вскармливает на своем лоне неисчерпаемое количество удивительных созданий, которые по красоте и разнообразию далеко превосходят все созданные искусством человека формы».

Создания природы, приведенные в книге Геккеля, красивы и симметричны. Это неотделимое свойство природной гармонии. В книге приводятся примеры одноклеточных организмов, форма которых точно передает икосаэдр.

Чем же вызвана такая природная геометризация? Может быть, тем, что из всех многогранников с таким же количеством граней именно икосаэдр имеет наибольший объем и наименьшую площадь поверхности. Это геометрическое свойство помогает морскому микроорганизму преодолевать давление водной толщи. Интересно и то, что именно икосаэдр оказался в центре внимания биологов в их спорах относительно формы вирусов. Вирус не может быть совершенно круглым, как считалось ранее. Чтобы установить его форму, брали различные многогранники и направляли на них свет под теми же углами, что и поток атомов на вирус. Оказалось, что только один многогранник дает точно такую же тень — *икосаэдр*. Его геометрические свойства, о которых говорилось выше, позволяют экономить генетическую информацию.

Правильные многогранники — это самые «выгодные» фигуры. И природа этим широко пользуется. Кристаллы некоторых знакомых нам веществ имеют форму правильных многогранников. Так, *куб* передает форму кристаллов поваренной соли NaCl, монокристалл алюминиево-калиевых квасцов имеет форму октаэдра, кристалл сернистого колчедана FeS — додекаэдра, сурьмянистый сернокислый натрий — тетраэдра, бор — икосаэдра. Правильные многогранники определяют форму кристаллических решеток многих химических веществ.

Сейчас уже доказано, что процесс формирования человеческого зародыша из яйцеклетки осуществляется путем ее деления по «бинарному» закону, то есть сначала яйцеклетка превращается в две клетки, затем две клетки превращаются в четыре и т. д. Раньше считалось, что на втором этапе деления четыре клетки формируют квадрат, но на самом деле все происходит по-другому: на втором этапе деления четыре возникающие клетки образуют *тетраэдр* (рис. 3.1, *а*). Далее клетки делятся до восьми; они формируют один тетраэдр вершиной вверх и один тетраэдр вершиной вниз, в результате получается *звездный тетраэдр*, который напоминает по своей форме «Яйцо жизни», известное в эзотерических науках (рис. 3.11).

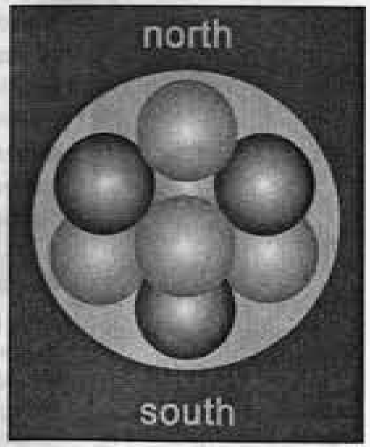


Рис. 3.11. Звездный тетраэдр

Таким образом, согласно современным воззрениям, процесс формирования новой жизни начинается с яйцеклетки, которая делится на две клетки.

Затем на стадии четырех клеток зародыш принимает форму тетраэдра, а на стадии восьми клеток он принимает форму двух сцепленных тетраэдров (звездный тетраэдр, или куб). Из двух кубов на стадии шестнадцати клеток формируется сфера, а из сферы на определенном этапе деления образуется тор из 512 клеток. Планета Земля и ее магнитное поле тоже представляет собой тор. Все эти формы являются священными фигурами, исходящими из первой информационной системы «Плода жизни», которая основана на так называемом «Кубе Метатрона».

Квазикристаллы Шехтмана

12 ноября 1984 года в небольшой статье, опубликованной в авторитетном журнале *Physical Review Letters* израильским физиком Даном Шехтманом, было представлено экспериментальное доказательство существования металлического сплава с исключительными свойствами. При исследовании методами электронной дифракции этот сплав проявил все признаки кристалла. Его дифракционная картина составлена из ярких и регулярно расположенных точек, совсем как у кристалла. Однако эта картина характеризуется наличием «икосаэдрической» или «пентагональной» симметрии, строго запрещенной в кристалле из геометрических соображений. Такие необычные сплавы были названы *квазикристаллами*. Менее чем за год были открыты многие другие сплавы подобного типа. Их было так много, что квазикристаллическое состояние оказалось намного более распространенным, чем это можно было бы представить.

Понятие квазикристалла представляет фундаментальный интерес, потому что оно обобщает и завершает определение кристалла. Теория, которая основана на этом понятии, заменяет извечную идею о «структурной единице, повторяемой в пространстве строго периодическим образом», ключевым понятием *дальнего порядка*.

Израильский физик Дан Шехтман

В статье «Квазикристаллы» известного физика Д. Гратиа подчеркивается:

«Это понятие привело к расширению кристаллографии, вновь открытые богатства которой мы только начинаем изучать. Его значение в мире минералов можно поставить в один ряд с добавлением понятия иррациональных чисел к рациональным в математике».

Что же такое квазикристалл? Каковы его свойства и как его можно описать? Как упоминалось выше, согласно основному закону кристаллографии на структуру кристалла накладываются строгие ограничения. Согласно классическим представлениям, кристалл составляется *ad infinitum* из единственной ячейки, которая должна плотно (грань к грани) устилать всю плоскость без каких-либо ограничений.

Как известно, плотное заполнение плоскости может быть осуществлено с помощью *треугольников* (рис. 3.12, *а*), *квадратов* (рис. 3.12, *б*) и *шестиугольников* (рис. 3.12, *г*). С помощью *пятиугольников* (*пентагонов*) такое заполнение невозможно (рис. 3.12, *в*). Те же фигуры показаны на рис. 29 на цветной вклейке.

Таковы были каноны традиционной кристаллографии, которые существовали до открытия необычного сплава алюминия и марганца, названного квазикристаллом. Такой сплав образуется при сверхбыстром охлаждении расплава со скоростью 10^6 К в секунду. При этом при дифракционном исследовании такого сплава на экране — упорядоченная картина, характерная для симметрии икосаэдра, обладающего знаменитыми запрещенными осями симметрии 5-го порядка.

Несколько научных групп во всем мире на протяжении нескольких последующих лет изучили этот необычный сплав посредством электронной микроскопии высокого разрешения. Все они подтвердили идеальную однородность вещества, в котором симметрия 5-го порядка сохранялась в макроскопических областях с размерами, близкими к размерам атомов (несколько десятков нанометров).

Согласно современным воззрениям разработана следующая модель получения кристаллической структуры квазикристалла.

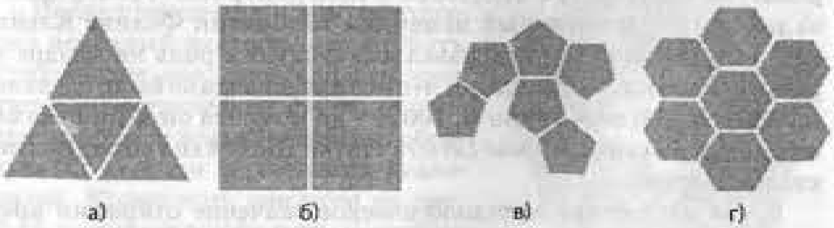


Рис. 3.12. Плотное заполнение плоскости может быть осуществлено с помощью: а) — треугольников, б) — квадратов, г) — шестиугольников

В основе этой модели лежит понятие «базового элемента». Согласно этой модели внутренний икосаэдр из атомов алюминия окружен внешним икосаэдром из атомов марганца. Икосаэдры связаны октаэдрами из атомов марганца. В «базовом элементе» имеется 42 атома алюминия и 12 атомов марганца. В процессе затвердевания происходит быстрое формирование «базовых элементов», которые быстро соединяются между собой жесткими октаэдрическими «мостиками». Напомним, что гранями икосаэдра являются равносторонние треугольники. Чтобы образовался октаэдрический мостик из марганца, необходимо, чтобы два таких треугольника (по одному в каждой ячейку) приблизились достаточно близко друг к другу и выстроились параллельно. В результате такого физического процесса и образуется квазикристаллическая структура с «икосаэдрической» симметрией.

В последние десятилетия было открыто много типов квазикристаллических сплавов. Кроме имеющих «икосаэдрическую» симметрию (5-го порядка) сплавов, существуют также сплавы с декагональной симметрией (10-го порядка) и додекагональной симметрией (12-го порядка). Физические свойства квазикристаллов начали исследовать лишь недавно.

Каково же практическое значение открытия квазикристаллов? В упомянутой выше статье Гратиа отмечается:

> «Механическая прочность квазикристаллических сплавов резко возрастает; отсутствие периодичности приводит к замедлению распространения дислокаций по сравнению с обычными металлами... Это свойство имеет большое прикладное значение: применение икосаэдрической фазы позволит получить легкие и очень прочные сплавы внедрением мелких частиц квазикристаллов в алюминиевую матрицу».

И в заключение еще одно замечание, касающееся истории развития «додекаэдро-икосаэдрической доктрины». Как упоминалось выше, гениальный немецкий математик Феликс Клейн еще в прошлом веке предсказал выдающуюся роль икосаэдра в развитии науки. Любопытно, что это предсказание было сделано в 1884 году, то есть ровно за 100 лет до момента опубликования журналом *Physical Review Letters* статьи Шехтмана об открытии квазикристаллов.

В чем же состоит методологическое значение открытия квазикристаллов? Прежде всего, открытие квазикристаллов является моментом великого торжества «додекаэдро-икосаэдрической доктрины», которая пронизывает всю историю естествознания и

является источником глубоких и полезных научных идей. Во-вторых, квазикристаллы разрушили традиционное представление о непреодолимом водоразделе между миром минералов, в котором пентагональная симметрия была запрещена, и миром живой природы, где пентагональная симметрия является одной из наиболее распространенных. И не следует забывать, что главной пропорцией икосаэдра является золотая пропорция. **И открытие квазикристаллов является еще одним научным подтверждением, что, возможно, именно золотая пропорция, проявляющая себя как в мире живой природы, так и в мире минералов, является главной пропорцией мироздания.**

Плитки Пенроуза

Когда Дан Шехтман привел экспериментальное доказательство существования квазикристаллов, обладающих *икосаэдрической симметрией*, физики в поисках теоретического объяснения феномена квазикристаллов обратили внимание на математическое открытие, сделанное на 10 лет раньше английским математиком Роджером Пенроузом. В качестве «плоского аналога» квазикристаллов были выбраны *плитки Пенроуза*, представляющие собой апериодические регулярные структуры, образованные «толстыми» и «тонкими» ромбами, подчиняющиеся пропорции Золотого сечения. Именно плитки Пенроуза были взяты на вооружение кристаллографами для объяснения феномена квазикристаллов. При этом роль *ромбов Пенроуза* в пространстве трех измерений начали играть икосаэдры, с помощью которых и осуществляется плотное заполнение трехмерного пространства.

Рассмотрим еще раз внимательно пентагон на рис. 3.13 и рис. 30 на цветной вклейке.

После проведения в нем диагоналей исходный пентагон может быть представлен как совокупность трех типов геометрических фигур. В центре находится новый пентагон, образуемый точками пересечения диагоналей. Кроме того, пентагон на рис. 3.13 включает в себя пять равнобедренных треугольников, окрашенных в темный цвет, и пять равнобедрен-

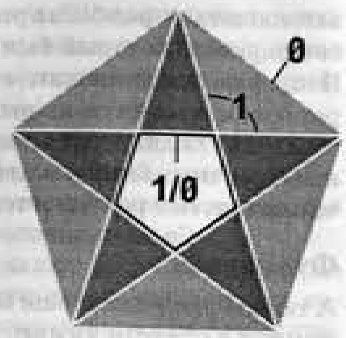


Рис. 3.13. Пентагон

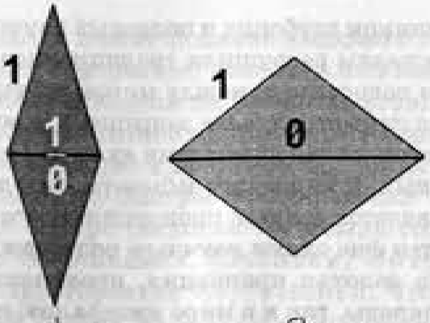


Рис. 3.14. «Золотые» ромбы:
а) — «тонкий» ромб, б) — «толстый» ромб

ных треугольников, окрашенных в светлый цвет. Темные треугольники являются «золотыми», так как отношение бедра к основанию равно золотой пропорции; они имеют острые углы в 36° при вершине и острые углы в 72° при основании. Светлые треугольники также являются «золотыми», так как отношение бедра к основанию равно золотой пропорции; они имеют тупой угол в 108° при вершине и острые углы в 36° при основании.

А теперь соединим два темных треугольника и два светлых треугольника их основаниями. В результате мы получим два *золотых ромба*. Первый из них (темный) имеет острый угол в 36 ° и тупой угол в 144 ° (рис. 3.14 и рис. 31 на цветной вклейке).

Ромб на рис. 3.14, *а* будем называть *тонким ромбом*, а ромб на рис. 3.14, *б* — *толстым ромбом*.

Английский математик и физик Роджерс Пенроуз использовал «золотые» ромбы на рис. 3.14 для конструирования «золотого» паркета, который был назван *плитками Пенроуза*. Плитки Пенроуза представляют собой комбинацию толстых и тонких ромбов, показанную на рис. 3.15.

Важно подчеркнуть, что *плитки Пенроуза* имеют пентагональную симметрию, или симметрию 5-го порядка, а отношение числа толстых ромбов к тонким стремится к золотой пропорции!

Фуллерены

А теперь расскажем еще об одном выдающемся современном открытии в области химии. Это открытие было сделано в 1985 году, то есть несколькими годами позже открытия квазикристал-

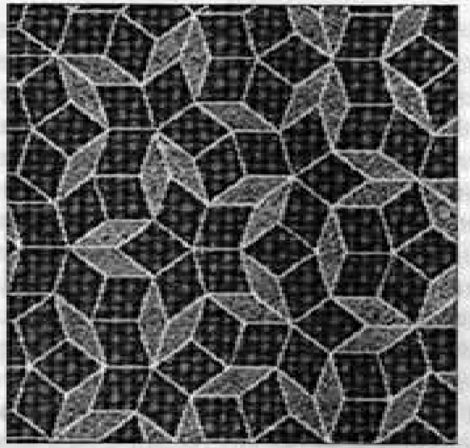


Рис. 3.15. Плитки Пенроуза

лов. Речь идет о так называемых фуллеренах. Термином «фуллерены» называют замкнутые молекулы типа C_{60}, C_{70}, C_{76}, C_{84}, в которых все атомы углерода находятся на сферической или сфероидальной поверхности. В этих молекулах атомы углерода расположены в вершинах правильных шестиугольников или пятиугольников, которые покрывают поверхность сферы или сфероида. Центральное место среди фуллеренов занимает молекула C_{60}, которая характеризуется наибольшей симметрией и, как следствие, наибольшей стабильностью. В этой молекуле, напоминающей покрышку футбольного мяча и имеющую структуру правильного усеченного икосаэдра (рис. 3.2, *д* и рис. 3.3), атомы углерода располагаются на сферической поверхности в вершинах 20 правильных шестиугольников и 12 правильных пятиугольников, так что каждый шестиугольник граничит с тремя шестиугольниками и тремя пятиугольниками, а каждый пятиугольник граничит с шестиугольниками.

Термин «фуллерен» берет свое начало от имени американского архитектора Бакминстера Фуллера, который, оказывается, использовал такие структуры при конструировании куполов зданий (еще одно применение усеченного икосаэдра!).

Фуллерены, по существу, представляют собой рукотворные структуры, вытекающие из фундаментальных физических исследований. Впервые они были синтезированы в 1985 году учеными Г. Крото и Р. Смолли, получившими в 1996 году Нобелевскую премию за это открытие. Но в 1992-м их неожиданно обнаружили в породах докембрийского периода, то есть фуллерены оказались не только рукотворными, но и природными образованиями. Сейчас фуллерены интенсивно изучают в лабораториях разных стран, пытаясь установить условия их образования, структуру, свойства и возможные сферы применения.

Наиболее полно изученный представитель семейства фуллеренов — фуллерен-60 (C_{60}) (его называют иногда бакминстерфуллерен). Известны также фуллерены C_{70} и C_{84}. Фуллерен C_{60} получают испарением графита в атмосфере гелия. При этом образуется мелкодисперсный, похожий на сажу порошок, содержащий 10 % углерода; при растворении в бензоле порошок дает раствор красного цвета, из которого и выращивают кристаллы C_{60}. Фуллерены обладают необычными химическими и физическими свойствами. Так, при высоком давлении C_{60} становится твердым, как алмаз. Его молекулы образуют кристаллическую структуру, как бы состоящую из идеально гладких шаров, свободно вращающихся в гранецентрированной кубической решетке. Благодаря этому свойству C_{60} можно использовать в качестве твердой смазки. Фуллерены обладают также магнитными и сверхпроводящими свойствами.

Российские ученые А. В. Елецкий и Б. М. Смирнов в своей статье «Фуллерены», опубликованной в журнале «Успехи физических наук» (1993, том 163, № 2), отмечают:

> «Фуллерены, существование которых было установлено в середине 80-х, а эффективная технология выделения которых была разработана в 1990 году, в настояшее время стали предметом интенсивных исследований десятков научных групп. За результатами этих исследований пристально наблюдают прикладные фирмы. Поскольку эта модификация углерода преподнесла ученым целый ряд сюрпризов, было бы неразумным обсуждать прогнозы и возможные последствия изучения фуллеренов в ближайшее десятилетие, но следует быть готовым к новым неожиданностям».

Новая геометрическая теория строения элементарных частиц

Когда написание настоящей книги близилось к завершению, на сайте «Академия Тринитаризма» (http://www.trinitas.ru) была опубликована статья российского исследователя Ильи Болдова «Геометрическая теория строения элементарных частиц». Содержание статьи оказалось настолько интересным с точки зрения приложений знаний о правильных многогранниках, что авторы решили включить этот оригинальный материал в книгу, несмотря на его спорность и дискуссионность.

Существующие теории строения элементарных частиц, как правило, не рассматривают частицы как протяженные объекты, имеющие какую-либо внутреннюю структуру. Между тем логично было бы предположить, что масса частицы зависит от ее пространственной протяженности, а точнее, объема. Это предположение также подкрепляется гипотезой «Большого взрыва», по которой вся видимая Вселенная образовалась практически одновременно. Скорее всего плотность различных частиц, создаваемых одновременно, была одинаковой. С большой долей вероятности можно говорить о том, что и плотность вещества в широком понимании, то есть частиц, которые принято называть элементарными, также одинакова в рамках наблюдаемой реальности. Это предположение о равномерной плотности частиц и их определенных размерах легло в основу предлагаемой «геометрической теории».

Современные методы изучения строения элементарных частиц, заключающиеся в их разгоне на ускорителе и разбивании о мишень, можно сравнить с изучением строения условного камешка путем его разгона до субсветовых скоростей, разбивания его о стену и исследования полученных обломков. Безусловно, многие открытия при изучении элементарных частиц сделаны благодаря именно таким методам. Но причисление к разряду элементарных все бо́льшего количества частиц, резонансов, бозонов дает основание считать, что либо не все они истинно элементарные, либо критерий их отбора необходимо менять, либо нужно как-то объяснить существующее положение вещей простым и понятным способом.

При разгоне частиц до субсветовых скоростей прирост массы весьма значителен, что позволило наблюдать частицы с массой намного больше, чем масса протона. Если сравнивать все это с попытками исследования условного камешка, то в момент удара о стену он превращается в огромный булыжник и разлетается на куски, масса которых намного больше массы исходного камешка. Именно это и ввело исследователей элементарных частиц в заблуждение, что куски, на которые разлетается исходная частица (протон), также являются самостоятельными частицами. Именно поэтому попытки систематизировать и как-то объяснить все известные элементарные частицы не удаются, поскольку все исследования ведутся с многократно увеличенными частями (кусками) протона и тех продуктов, на которые эти куски распадаются далее.

Еще в 1917 году П. Эренфест отметил, что в евклидовых пространствах с размерностью более трех не могут существовать устойчивые аналоги атомов и планетных систем. Но поскольку при размерности менее трех не могут возникнуть сложные структуры, то три является единственной размерностью, при которой реализуются основные, устойчивые элементы Вселенной, то есть элементарные частицы.

Логично было бы предположить (применив принцип Оккама), что и элементарные частицы существуют в трехмерном виде и только. Следовательно, все свойства, и в первую очередь масса, этих частиц определяются только их строением и объемом в нашем трехмерном мире.

Все эти доводы и были положены Ильей Болдовым в основу следующей гипотезы, к которой, как оказалось, он пришел много лет назад, еще будучи учеником средней школы.

Гипотеза Ильи Болдова: *элементарные частицы представляют собой правильные и полуправильные многогранники. Масса частицы (в покое) определяется объемом соответствующего многогранника и зависит от длины ребра. Проявления различных законов сохранения нефизических зарядов (лептонных, барионных и прочих) — следствия закона сохранения структуры многогранника, выраженной в его осях симметрии.*

Далее Болдов подбирает следующее соответствие между перечисленными выше элементарными частицами и правильными и полуправильными многогранниками. В основу такого подбора он кладет следующие рассуждения. Он начинает с платоновых тел. Как следует из табл. 3.1, среди платоновых тел можно выделить две группы так называемых дуальных многогранников, которые трансформируются друг в друга, если центры граней одного принять за вершины другого и которые имеют одинаковые группы симметрий (табл. 3.4). Дуальными правильными многогранниками являются следующие пары: *гексаэдр* и *октаэдр, додекаэдр* и *икосаэдр.* У каждой из этих пар одинаковое количество ребер, а количество вершин и граней меняются местами. Болдов предполагает, что эти пары связаны лептонными зарядами, тогда первая пара это *электрон,* которому Болдов приписывает форму *гексаэдра* или *куба,* и *электронное нейтрино,* которому приписывается форма *октаэдра.*

При этом вторая пара — это *мюон,* которому приписывается форма *додекаэдра,* и *мюонное нейтрино,* которому приписывается форма *икосаэдра.*

Кроме того, существует также правильный многогранник, *тетраэдр,* который дуален сам себе. Его форму приписывается *фотону.*

Возникает вопрос: каковы основания для приписывания элементарной частице формы того или иного многогранника? Этим основанием является гипотеза Болдова о том, что *масса* частицы (в покое) определяется объемом соответствующего многогранника и зависит от длины ребра. В качестве примера рассматриваются девять типов элементарных частиц. К ним относятся γ (*фотон*), *лептоны:* ν_e (*электронное нейтрино*), ν_μ (*мюонное нейтрино*), ν_τ (*тау-нейтрино*), e^- (*электрон*), μ^- (*мюон*), τ^- (*тау-мезон*), *мезоны:* π^0 (*пи-0 мезон*), $\pi^{+/-}$ (*пи-плюс/минус мезон*). Болдов доказывает плодотворность такого подхода.

Например, масса *мюона* (в электронных массах), как известно, равна **206,7**; с другой стороны, если принять длину стороны додекаэдра равной 3, то его объем становится равным **206,9.** Отсюда вытекает, что погрешность определения массы *мюона,* по новой теории, составляет менее семи сотых процента, что является очень хорошим совпадением с экспериментальными данными. И этот факт нельзя считать случайным совпадением, то есть *мюон* имеет форму *додекаэдра.* Подобным же образом Болдов обосновывает выбор других платоновых тел в качестве формы еще четырех элементарных частиц.

Но платоновых тел всего пять, а число элементарных частиц, по Болдову, девять. Поэтому Болдов обращается к другим широко известным многогранникам, в частности к *архимедовым телам* и *выпуклым параллелоэдрам (телам Федорова).* По мнению Болдова, форму *усеченного тетраэдра* (рис. 3.2, *а*) имеет такая элементарная частица, как π^0, а форму *усеченного куба* (рис. 3.2, *б*) — $\pi^{+/-}$.

Среди *выпуклых параллелоэдров* (рис. 3.16) Болдов выделяет *гексагон,* то есть многогранник, представляющий собой прямую призму с правильным шестиугольником в основании и высотой, равной стороне шестиугольника (на рис. 3.16 — нижний слева многогранник). Дуальным к *гексагону* является *додекатетр,* который похож на *октаэдр*, только граней у вершины шесть и грани представляют собой равнобедренные треугольники с основанием, равным $\sqrt{3}/2$ от длины боковой стороны. При этом форму *гексагона* имеет τ^{-}, а форму *додекатетра* имеет ν_{τ}.

Заметим, что теория Ильи Болдова полностью противоречит современной теории элементарных частиц и вполне может быть причислена к разряду «лженаук», то есть стать предметом разбирательства печально знаменитой Комиссии по лженаукам, организованной в рамках Российской академии наук.

Авторы настоящей книги, которые не считают себя специалистами в области теоретической физики, вряд ли решились бы поместить в свою книгу «безумную» теорию какого-то малоизвестного в научных кругах Ильи Болдова из Самары, если бы не некоторые обстоятельства. Ну, во-первых, теория Болдова очень уж напоминает «Платонову космологию». Ведь Платон тоже считал, что атомы четырех «элементов» — *огня, воздуха, земли и воды*, лежащих в основе мироздания, имеют соответственно форму *тетраэдра, октаэдра, куба и икосаэдра*. Конечно, никто всерьез сейчас не воспринимает «Платонову космологию», то есть вряд ли это может стать серьезным аргументом в пользу теории Болдова.

Но вот еще одна свежая информация все же в пользу теории Болдова. В 2003 году в Виннице (Украина) состоялась международная конференция «Проблемы гармонии, симметрии и Золотого сечения в природе, науке и искусстве». На пленарном заседании этой конференции с большим интересом была заслушана лекция профессора Юрия Владимирова «Кварковый икосаэдр, заряды и угол Вайнберга». Доклад был опубликован в трудах конференции (Винница, 2003, издательство Винницкого аграрного университета). Аннотация к статье гласит следующее:

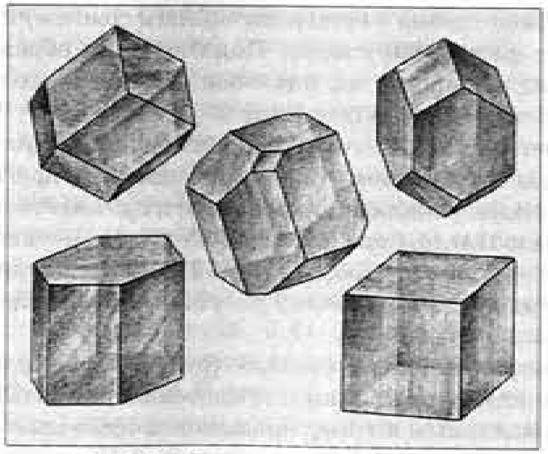
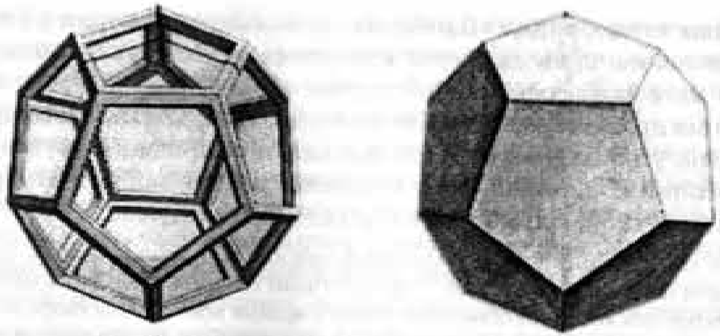


Рис. 3.16. Выпуклые параллелоэдры (тела Федорова)

> «Показано, что понятие поколений кварков и значения зарядов взаимодействий кварков связаны с дискретными симметриями икосаэдра, в 12 вершинах которого помещены левые и правые компоненты кварков шести ароматов. При описании икосаэдра в цилиндрических координатах имеются три варианта выбора оси симметрии: через середины противоположных ребер, через середины противоположных граней и через противоположные вершины. Первый вариант позволяет определить три поколения кварков, второй — ввести четыре заряда, описывающих Z-взаимодействия кварков и вычислить угол Вайнберга, третий — определить квазиэлектрические заряды и ввести понятие квазипространств».

Итак, вновь платонов икосаэдр применительно к теории элементарных частиц. И автором статьи является весьма известный в физических кругах ученый, представляющий престижную кафедру теоретической физики Московского университета. Вряд ли кто-либо из маститых российских академиков решится обвинить профессора Владимирова в создании лженаучной теории. Тогда как быть с «геометрической теорией элементарных частиц» Ильи Болдова? А вдруг она правильная? Может, стоит более внимательно разобраться с оригинальной теорией Болдова и выдвинуть его на Нобелевскую премию, если он, конечно, того заслуживает?

Нам кажется, что современную науку, в частности физику, ожидают большие сюрпризы, связанные с платоновыми, архимедовыми телами и телами Федорова. Особенно с такими из них, как платонов икосаэдр и додекаэдр и архимедов усеченный икосаэдр. Как упоминалось, форму архимедова усеченного икосаэдра имеет *фуллерен* C_{60} (Нобелевская премия 1996 года), а форму платонова икосаэдра имеют квазикристаллы Дана Шехтмана (потенциальная Нобелевская премия). Но не следует забывать, что главной пропорцией платонова икосаэдра является Золотое сечение. И от того что Архимед осуществил «усечение» платонова икосаэдра, полученная фигура, архимедов усеченный икосаэдр, не перестает быть «золотой», более того, она становится еще более «золотой», так как на ее поверхности появляется 12 пента-



а) б)

Рис. 3.17. Изображения Леонардо да Винчи додекаэдра в книге Л. Пачоли «Божественная пропорция»: а) — методом жестких ребер, б) — методом сплошных граней

гонов, основанных на Золотом сечении. Если к приведенным примерам добавить ботаническое явление *филлотаксиса*, использование *пентагональной симметрии* и *«золотых» спиралей* в объектах живой природы, то такое широкое распространение Золотого сечения в живой и неживой природе дает основание считать доказанным тот факт, что **золотая пропорция является главной пропорцией мироздания**, то есть некоторым универсальным кодом природы!

3.9. Использование правильных многогранников в искусстве

В 2002 году журнал «Энергия» опубликовал серию статей кандидата физико-математических наук Е. А. Каца под названием «Искусство и наука — о многогранниках вообще и усеченном икосаэдре в частности». Статья содержит много интересной информации об использовании правильных многогранников в искусстве. Материал этой статьи и положен авторами в основу настоящего раздела.

Методы изображения Леонардо да Винчи правильных многогранников

Многие авторы отмечают оригинальные способы пространственного изображения *икосаэдра* (см. рис. 3.1, *г*), додекаэдра (см. рис. 3.1,

д) и усеченного икосаэдра (см. рис. 3.2, *д*, рис. 3.3), предложенные Леонардо да Винчи, и приводят репродукции этих прекрасных изображений из иллюстрированной Леонардо книги его современника, францисканского монаха и математика Луки Пачоли (1445–1514) «Божественная пропорция», изданной в 1509 году. Видимо, нельзя считать случайностью причастность Леонардо к изучению этих совершенных геометрических фигур. Более того, это глубоко символично. Живописец, скульптор, ученый и изобретатель Леонардо да Винчи (1452–1519) — символ неразрывности искусства и науки, а следовательно, закономерен его интерес к таким прекрасным, высокосимметричным объектам, как выпуклые многогранники.

На рис. 3.17 и рис. 32 на цветной вклейке приведены изображения *додекаэдра*, сделанные Леонардо для книги «Божественная пропорция» двумя методами — *методом жестких ребер* (рис. 3.17, *а*) и *методом сплошных граней* (рис. 3.17, *б*). Сравнение этих методов на примере додекаэдра убедительно показывает преимущество *метода жестких ребер*. Суть *метода жестких ребер* состоит в том, что грани многогранника изображены «пустыми» — не сплошными. Строго говоря, грани не изображаются вовсе, они существуют только в нашем воображении. Зато ребра многогранника изображены не геометрическими линиями (которые, как известно, не имеют ни ширины, ни толщины), а жесткими трехмерными сегментами. Такая техника изображения многогранников позволяет зрителю, во-первых, безошибочно определить, какие из ребер принадлежат передним, а какие — задним граням многогранника (что практически невозможно при изображении ребер геометрическими линиями), и, во-вторых, взглянуть как бы *сквозь* геометрическое тело, ощутить его в перспективе, которая теряется при использовании техники *сплошных граней*.

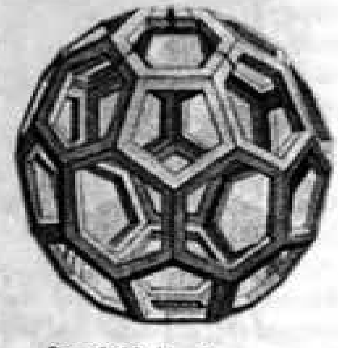


Рис. 3.18. Изображение Леонардо да Винчи усеченного икосаэдра методом жестких ребер в книге Луки Пачоли «Божественная пропорция»

Ниже дано также изображение усеченного икосаэдра, сделанное Леонардо да Винчи для книги Луки Пачоли по методу жестких граней. Гравюру с изображением усеченного икосаэдра (рис. 3.18) Леонардо предваряет надписью по латыни *Ycocedron Abscisus* (усеченный икосаэдр) *Vacuus*. Термин *Vacuus* как раз и означает, что грани многогранника изображены «пустыми» — не сплошными.

Следует отметить, что изображение многогранников методом жестких граней получило в последующем широкое распространение в произведениях науки и искусства. В качестве примеров ниже приведены изображения платоновых тел на титульном листе изданной во Франции в 1560 году книги Жана Кузена *Livre de Perspective* («Книга о перспективе») (рис. 3.19) и надгробный памятник Сэру Томасу Джорджсу (рис. 3.20), установленный в 1635 году в кафедральном соборе в Солсбери (Англия).

Заметим, что Иоганн Кеплер использовал метод жестких граней при изображении многогранников, составляющих его «Космический кубок» (см. рис. 3.8).

Полиэдра Луки Пачоли

Книга Пачоли, для которой Леонардо выполнил 60 иллюстраций различных многогранников, оказала большое влияние на развитие геометрии того времени, в частности стереометрии много-

Рис. 3.19. Титульный лист книги Ж. Кузена «Книга о перспективе»

Рис. 3.20. Надгробный памятник в кафедральном соборе Солсбери

Рис. 3.21. *Барбари. Лука Пачоли*

гранников. Как упоминалось, Пачоли был также одним из крупнейших европейских алгебраистов XV века и, что не менее важно, изобрел принцип так называемой двойной записи, который и в настоящее время применяется во всех без исключения системах бухгалтерского учета. Так что его смело можно называть отцом современной бухгалтерии. Однако довольно загадочная и противоречивая личность Пачоли до наших дней вызывает ожесточенные споры историков науки. Известно, что Лука Пачоли родился в 1445 году в итальянском городке Борго-Сан-Сеполькро. В детстве он учился в мастерской художника и математика Пьеро делла Франческа, а затем в университете Болоньи, который в XV–XVI веках был одним из лучших в Европе (в разное время его студентами были, например, Коперник и Дюрер). В 1472 году Пачоли под именем Фра Лука ди Борго-Сан-Сеполькро вернулся в родной город и начал работу над самым знаменитым из своих сочинений, книгой «Сумма знаний по арифметике, геометрии, отношениям и пропорциональности», напечатанной в Венеции в 1494 году. В 1496-м его приглашают с лекциями в Милан, где он знакомится с Леонардо да Винчи. Леонардо, прочитав «Сумму», забросил работу над собственной книгой по геометрии и начал готовить иллюстрации к новому труду Пачоли «Божественная пропорция».

Некоторые исследователи обвиняют автора «Божественной пропорции» в плагиате неизданных рукописей, принадлежащих перу его учителя Пьеро делла Франческа. Другие, наоборот, защищают Пачоли от этих обвинений. В общем, дело темное. А вот внешность Пачоли нам доподлинно известна благодаря его портрету (рис. 3.21 и рис. 24 на цветной вклейке) кисти Якопо Барбари (1440–1515). Картина прекрасна во всех отношениях, она прекрасно раскрывает особенности характера изображаемых людей. Каждая деталь композиции на картине Барбари полна смысла. Художник проявляет глубокое понимание взаимосвязи искусства и науки, так свойственное именно мастерам Возрождения.

Пачоли в рясе францисканского монаха изображен стоящим за столом с геометрическими инструментами и книгами (в правом нижнем углу картины — модель додекаэдра). Внимание Пачоли и красивого молодого человека, стоящего справа и чуть сзади от него, приковано к изучению многогранника, подвешенную стеклянную модель которого мы видим в левом верхнем углу композиции. Выбор многогранника не случаен: это *ромбический кубооктаэдр*, или *полихедра* (рис. 3.22). По мнению современного математика и художника Джорджа Харта, Пачоли сам выбрал его для картины, так как особенно гордился его открытием.

Личность молодого человека, стоящего рядом с Пачоли на картине Якопо Барбари (рис. 3.21), до сих пор вызывает споры историков искусства, одни из которых считают, что это автопортрет самого Барбари, другие же отождествляют его с Альбрехтом Дюрером (1471–1528), художником и графиком, величайшим представителем немецкого Ренессанса. Это предположение по меньшей мере спорно.

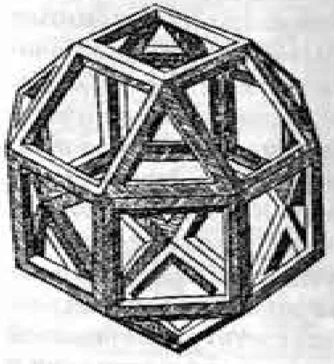


Рис. 3.22. Ромбический кубооктаэдр, или полихедра, Луки Пачоли

Зато, и это гораздо более важно в нашем контексте, доподлинно известно другое. Дюрер был поражен художественной манерой Барбари, строившего свои композиции на основе глубокого изучения системы пропорций, то есть строго определенного соотношения частей изображаемого между собой. «Я в то время более желал узнать, в чем состоит его способ, нежели приобрести королевство», — признавался Дюрер впоследствии.

Дюрер стал изучать законы перспективы, мечтал встретиться с прославленными итальянскими мастерами, учиться у них, состязаться с ними. С этой целью в 1505 году Дюрер отправляется в путешествие по Италии. Кто были его учителями в школе перспективы, в точности не известно (среди прочих называются имена Луки Пачоли и Пьеро делла Франческа), но обучение в этой школе Дюрер продолжал всю жизнь. За три года до смерти, в 1525-м, пятидесятичетырехлетний мастер, автор более шестидесяти живописных полотен и нескольких сотен гравюр, спешит поделиться с потомками накопленными им за жизнь секретами перспективы. Он издает трактат — «Руководство к измерению» (а затем еще два: «Наставление к укреплению городов» в 1527-м и «Четыре книги о пропорциях» в 1528 году).

Книга Дюрера — серьезный научный вклад в теорию перспективы, стереометрию многогранников. Он первым описал несколько неизвестных в то время архимедовых тел, а также разработал и впервые опубликовал в своей книге модели плоских разверток различных многогранников, включая развертку усеченного икосаэдра. В наше время подобные развертки, из которых собираются объемные модели многогранников, широко используются при изучении элементарных форм кристаллов, структуры молекул (фуллеренов, например), вирусов и в других случаях.

В 1512 году в черновом варианте своего первого трактата о пропорциях Дюрер писал:

> «Все потребности человека настолько пресыщаются преходящими вещами в случае их избытка, что последние вызывают в нем отвращение, исключая одну только жажду знаний... Желание много знать и через это постигнуть сущность всех вещей заложено в нас от природы».

Эти слова стали прологом к теоретическим трудам Дюрера. Жаждой знаний проникнуто и все искусство той эпохи, крупнейшие представители которой становятся учеными-естествоиспытателями. Идею единства художественного вдохновения и математической теории отражает и его созданная в 1514 году знаменитая гравюра «Меланхолия», воплотившая образ причастного к божественному наитию существа, окруженного инструментами геометрии (рис. 3.23). Присутствие на гравюре многогранника (скорее всего, усеченного ромбоэдра), конечно же, не случайно.

Сотни страниц исписаны искусствоведами в попытках объяснить значения символов, использованных Дюрером. Один из них, Э. Пановски, считает:

«Дюрер представил "Меланхолию" как один из четырех темпераментов и как одно из семи свободных искусств — геометрию. Он воплощает в ней тип художника Ренессанса, который ценит практическое умение, не избегает математической теории, и который, чувствуя себя причастным божественному вдохновению, одновременно страдает от всего человеческого несовершенства и ограниченности. Таким образом, это в некотором смысле духовный автопортрет Дюрера».

Пьеро делла Франческа

Многие художники разных эпох и стран испытывали постоянный интерес к изучению и изображению многогранников. Пик

Рис. 3.23. *Дюрер. Меланхолия*

этого интереса приходится, конечно, на эпоху Возрождения. Изучая явления природы, художники Возрождения стремились найти опирающиеся на опыт науки способы их изображения. Учения о перспективе, светотени и пропорциях, построенные с учетом знаний математики, оптики, анатомии, становятся основой нового искусства. Они позволяют художнику воссоздавать на плоскости трехмерное пространство, добиваться впечатления рельефности предметов. Для некоторых мастеров Возрождения многогранники являлись просто удобной моделью для тренировки мастерства перспективы. Другие восхищались их симметрией и лаконичной красотой. Третьих, вслед за Платоном, привлекали их философские и мистические символы.

Список крупнейших мастеров Возрождения, часто изображавших многогранники и глубоко изучавших их геометрию, если не считать уже названных Леонардо и Дюрера, необходимо начать с *Пьеро делла Франческа* (около 1420–1492). О жизни и личности Пьеро делла Франческа, гениального художника, серьезного теоретика искусства и выдающегося геометра сохранилось мало достоверных сведений. Известно, что он родился в семье ремесленника в небольшом городе Борго-Сан-Сеполькро в Умбрии, учился во Флоренции, затем работал в ряде городов Италии, в том числе в Риме.

Творчество Пьеро делла Франческа вышло за рамки местных живописных школ и определило искусство итальянского Возрождения в целом. Однако немногие знают, что делла Франческа был выдающимся математиком, внесшим, в частности, существенный вклад в теорию многогранников. При жизни он был непререкаемым авторитетом в геометрии и науке о перспективе. Однако после смерти имя делла Франческа — ученого было на долгое время предано забвению. Во многом это произошло из-за того, что, по-видимому, сразу же после смерти художника Лука Пачоли, который был учеником делла Франческа, опубликовал большую часть его работ в своей книге (без ссылок на авторство делла Франческа). К счастью, в начале XX века были обнаружены оригиналы трех считавшихся утерянными математических рукописей делла Франческа (сейчас они находятся в Библиотеке Ватикана). После пяти веков забвения слава великого математика своего времени вернулась к художнику.

В настоящее время доподлинно известно, что именно Пьеро делла Франческа был первым из мастеров Возрождения, открывшим (не зная, конечно, что это было сделано Архимедом) и подробно описавшим архимедовы тела, в частности пять усеченных платоновых тел: усеченные тетраэдр, октаэдр, додекаэдр и, что особенно важно, усеченный икосаэдр. В его рукописи «О пяти правильных телах» (*Libbelus de quinque corporibus regularibus*), датированной 1480 годом, обнаружено старейшее из дошедших до наших дней изображений усеченного икосаэдра.

Художественные произведения Пьеро делла Франческа отличаются величественной торжественностью, благородством и гармонией образов, глубокой продуманностью пропорций, разумной ясностью перспективных построений. Одним из ярких примеров его художественного стиля является картина «Крещение Христа» (1450–1455) (рис. 3.24 и рис. 35 на цветной вклейке), хранящаяся в Лондонской галерее. В центре картины Христос. Он по щиколотку в водах реки, его руки сложены в католическом молитвенном жесте. Рядом Иоанн Креститель, он льет воду из блюдца на голову Христу (крещение обливанием). Над головой Иисуса парит голубь — Святой Дух.

Искусство интарсии

В конце XV — начале XVI веков в Северной Италии было очень популярно *искусство интарсии (intarsia)* — особого вида инкрустации, мозаики, собранной из тысяч мелких кусочков различных пород дерева. Два выдающихся образца этого искусства с изображением многогранников показаны на рис. 3.25. Обе мозаики созданы *Фра Джованни да Верона* (1457–1525) для церкви *Santa Maria in Organo* в Вероне ориентировочно в 1520 году. Изображение полуоткрытых ставень создает эффект объемности на плоской мозаике, который усиливается изображением многогранников (в том числе усеченного икосаэдра) в разработанной Леонардо технике жестких ребер.

«Тайная вечеря» Сальвадора Дали

Нельзя удержаться от удовольствия привести примеры изображений многогранников, выполненных знаменитым художником XX века *Сальвадором Дали* (1904–1989). Несколько слов об этом оригинальном художнике. Как известно, Сальвадор Дали — испанский художник, один из самых известных представителей *сюрреализма*. Превосходный рисовальщик и живописец,

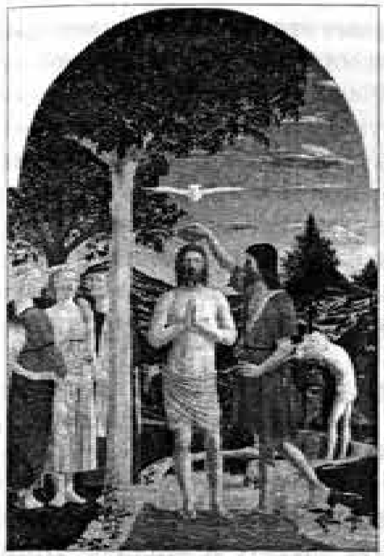
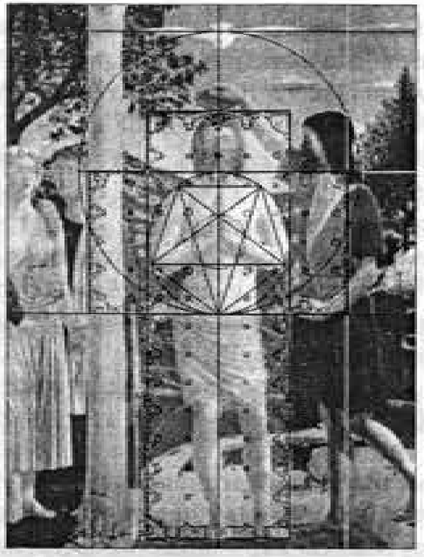



Рис. 3.24. Картина Пьеро делла Франческа «Крещение Христа» (1450–1455) и ее гармонический анализ, основанный на Золотом сечении

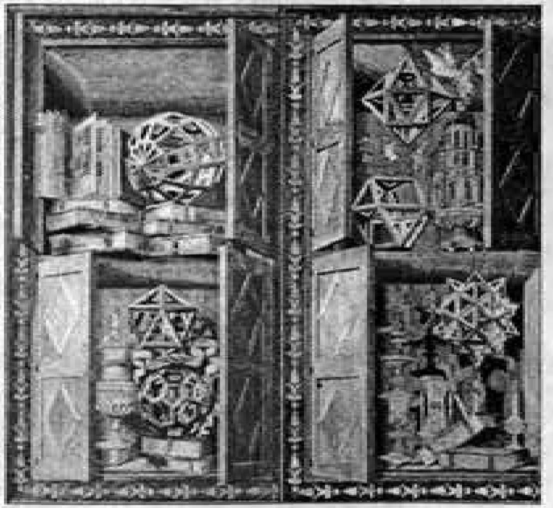


Рис. 3.25. Интарсии работы Фра Джовани да Верона, созданные для церкви *Santa Maria in Organo* в Вероне

Дали создавал похожие на кошмарные видения образы, которые сам называл «рисованными снимками сновидений». Некоторые наиболее часто повторяющиеся образы, например часы, под лучами солнца теряющие форму, стали своего рода фирменным знаком Дали. В 1940 году он уезжает в США, где ведет жизнь затворника. В 1955 году Дали возвращается в Испанию. Он также занимался скульптурой, оформлением книг, его авторству принадлежат ювелирные изделия, декорации для театра и кино. Творчество Сальвадора Дали до сих пор вызывает споры (многие критики считают, что после 30-х годов он не создал ничего заслуживающего внимания).

В 1955 году Дали создает одну из самых знаменитых своих работ — «Тайную вечерю» (рис. 3.26 и рис. 37 на цветной вклейке).

Это большое полотно — подлинный шедевр живописи. Геометрический рационализм свидетельствует о неодолимой вере в сакральную силу числа. Додекаэдр в этой картине олицетворяет духовную гармонию, нравственную чистоту и величие. Представляется интересной трактовка этого произведения Завадской, которая писала:

«В нем воплощено философско-религиозное и эстетическое кредо Дали. Здесь и воздух, и свет, и конструкция, и сон, и явь, и надежда, и сомнение.

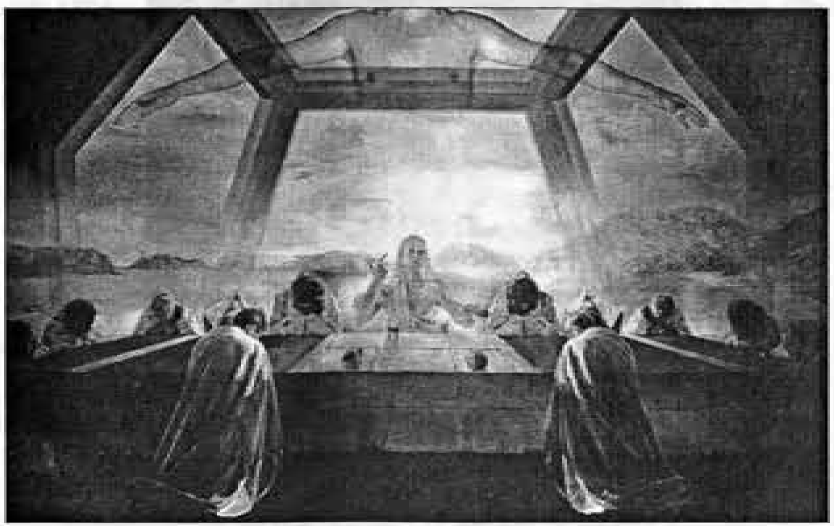


Рис. 3.26. *Дали.* Тайная вечеря

В центре большого горизонтального полотна (167x288) изображен Христос в трех ипостасях — как сын, сошедший на Землю, он сидит за столом со своими учениками, но потом мы замечаем, что он вовсе и не сидит за столом, а погружен по пояс в воду — то есть крестится водой, или духом святым, тем самым воплощая вторую ипостась троицы, а над ним призрачно высится мужской торс, словно часть композиции "Вознесение" — возвращение к Богу Отцу. Апостолы изображены низко склонившими головы на стол — они словно поклоняются Христу (или спят!) — в этом случае есть аллюзия на евангельский текст, содержащий просьбу Христа не спать, пока он молит Бога: "Чашу мимо пронеси"».

К этому необходимо лишь присовокупить идеи, высказанные академиком Б. Раушенбахом в статье «О логике триединости»: «...непостижимой является вовсе не логическая структура Троицы (она вполне разумна), а кардинальное качество Троицы, жизнь Бога в Самом Себе».

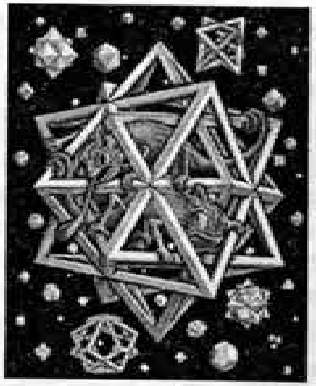
Творчество Маурица Эшера

Мауриц Корнелис Эшер (*Maurits Cornelis Escher*) (1898–1972), голландский график, родился 17 июня 1898 в Леувардене (Голландия) в семье инженера-гидравлика. В 1919 году поступил в школу архитектуры и декоративных искусств в Харлеме, но вскоре оставил архитектуру ради занятий графикой. До 1937-го много путешествовал по Европе, делал наброски, обращая особое внимание на обманчивые, двусмысленные элементы пейзажа.

Работы Эшера вовлекают зрителя в противопоставление иллюзии и реальности. В гравюре «Рептилии» (рис. 3.27, *б*) плоское изображение ящериц чудесным образом наполняется объемом, они словно выползают за пределы рисунка. Такие работы, как «Рептилии» и «Другой мир», где стены, потолок и пол меняются своими пространственными ролями при каждом повороте листа, отражают увлечение художника «волшебной механикой» метаморфоз графического изображения.

Графические фантазии Маурица Эшера, две из которых представлены на рис. 3.27, являются ярким примером художественного изображения многогранников в XX веке. Заметим, что изображая многогранники в этих работах, Эшер пользуется как техникой сплошных граней, так и методом жестких ребер Леонардо да Винчи.

Вообще, творчество Эшера весьма почитаемо учеными, в частности математиками и кристаллографами. М. П. Шаскольская,



а)

б)

Рис. 3.27. Графические фантазии Маурица Эшера: а) — «Звезды» (1948), б) — «Рептилии» (1943)

одна из основателей советской школы кристаллографии, ученица академика А. В. Шубникова, в своей книге «Очерки о свойствах кристаллов» пишет:

«Каждый кристаллографический конгресс обычно сопровождается выставками: кристаллографического оборудования, книг, фотографий, наилучших искусственно выращенных кристаллов. А на кристаллографическом конгрессе в Кембридже (1960) событием стала выставка картин голландского художника Маурица Эшера. Сам художник, пожилой человек с узким смуглым лицом, живыми глазами и небольшой бородкой, присутствовал как делегат конгресса, давал пояснения к своим рисункам и рассказал о них в докладе на конгрессе. Нет, Эшер не был ученым-кристаллографом, он — художник, график, окончивший в 1922 году школу архитектуры в Гарлеме, продолжавший затем свое художественное образование в Испании и Италии, известный миру по многим художественным выставкам. И вот теперь его рисунки привлекли внимание кристаллографов. Художник и кристаллография? Что общего между ними? А дело в том, что Мауриц Эшер в своих рисунках как бы открыл и интуитивно проиллюстрировал законы сочетания элементов симметрии, то есть те законы, которые властвуют над кристаллами, определяя и их внешнюю форму, и их атомную структуру, и их физические свойства. Эшер увлекается периодическими рисунками, составлением мозаичных узоров из повторяющихся фигур. Он вписывает или, вернее, врисовывает одно изображение в другое, так чтобы одинаковые фигурки периодически повторялись, и между ними не оставалось пустых мест».

Но ведь это и есть закон, по которому размещаются частицы в структуре *кристалла — закон плотнейшей упаковки*: периодическое повторение одинаковых групп частиц, без промежутков и нарушений.

Мир Матюшки Тейи Крашек

Матюшка Тейя Крашек *(Matjuska Teja Krasek)* получила степень бакалавра живописи в Колледже визуальных искусств (Любляна, Словения) и является свободным художником. Живет и работает в Любляне. Ее теоретическая и практическая работа фокусируется на симметрии как связующей концепции между искусством и наукой. Ее художественные работы представлялись на многих международных выставках и опубликованы в международных журналах *(Leonardo Journal, Leonardo on-line)*.

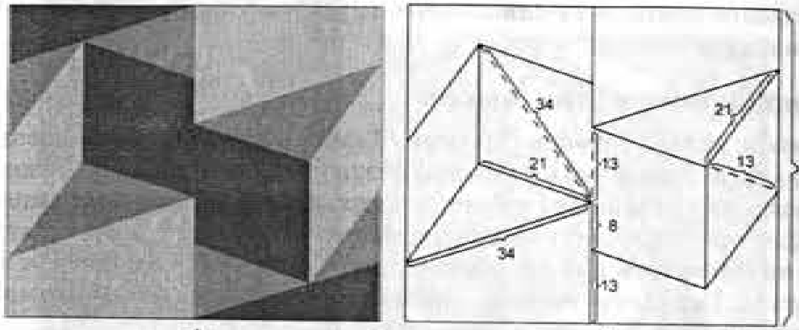
Художественное творчество Матюшки Тейи Крашек связано с различными видами симметрии, плитками и ромбами Пенроуза, квазикристаллами, Золотым сечением как главным элементом симметрии, числами Фибоначчи. С помощью рефлексии, воображения и интуиции она пытается подобрать новые отношения, новые уровни структуры, новые и различные виды порядка в этих элементах и структурах. В своих работах она широко использует компьютерную графику как весьма полезное средство для создания художественных работ, которое является связующим звеном между наукой, математикой и искусством.

М. Т. Крашек на своей выставке Kaleidoscopic Fragrances, Любляна, 2005

На рис. 3.28 и рис. 39 на цветной вклейке приведена композиция Крашек, связанная с числами Фибоначчи. Если мы выберем одно из чисел Фибоначчи (например, 21 см) для длины стороны ромба Пенроуза в этой ощутимо нестабильной композиции, мы можем наблюдать, как длины некоторых отрезков в композиции образуют последовательность Фибоначчи.

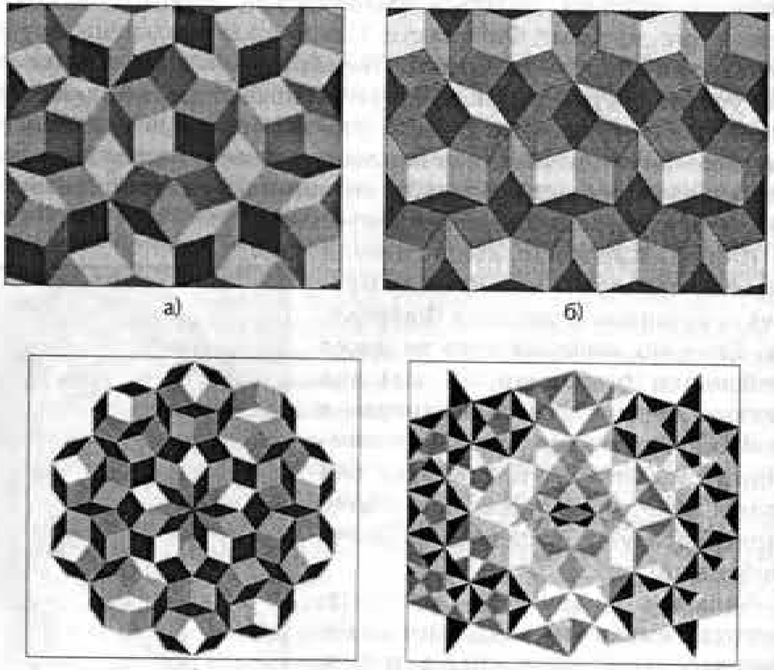
Большое количество художественных композиций художницы посвящено квазикристаллам и решеткам Пенроуза (рис. 3.29 и рис. 40 на цветной вклейке).

В композиции Матюшки Тейи Крашек и Клиффорда А. Пиковера «Био-



а) б)

Рис. 3.28. *Крашек.* Числа Фибоначчи (холст, 1998).



а) б)

в) г)

Рис. 3.29. Мир Тейи Крашек: а) — «Мир квазикристаллов» (компьютерная графика, 1996), б) — «Звезды» (компьютерная графика, 1998), в) — «10/5» (холст, 1998), г — «Квазикуб» (холст, 1999)

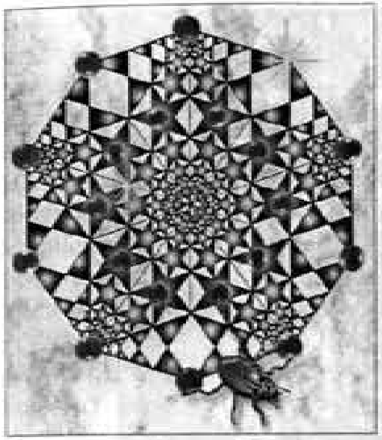


Рис. 3.30. *Крашек, Пиковер.* Биогенезис (2005)

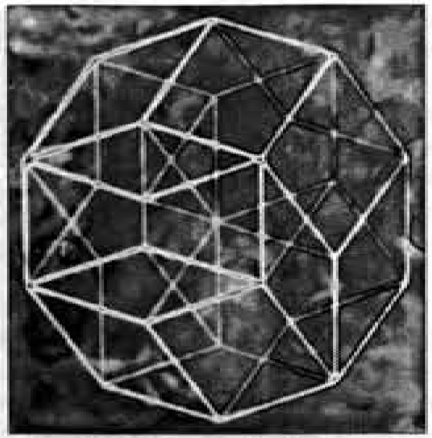


Рис. 3.31. *Крашек.* Double Star GA

генезис» (2005) (рис. 3.30 и рис. 41 на цветной вклейке) представлен декагон, состоящий из ромбов Пенроуза. Можно наблюдать отношения между ромбами Пенроуза; каждые два соседние ромба Пенроуза образуют пентагональную звезду.

В картине *Double Star GA* (рис. 3.31) мы видим, как сочетаются плитки Пенроуза, чтобы сформировать двумерное представление потенциально гиперпространственного объекта с десятиугольным основанием. При изображении картины художница использовала метод жестких ребер, предложенный Леонардо да Винчи. Именно такой способ изображения позволяет увидеть в проекции картины на плоскость большое число пентагонов и пентаклов, которые образуются проекциями отдельных ребер ромбов Пенроуза. Кроме того, в проекции картины на плоскость мы видим декагон, образованный ребрами 10 смежных ромбов Пенроуза. По существу, в этой картине Матюшка Тейя Крашек нашла новый правильный многогранник, который, вполне возможно, реально существует в природе.

В композиции Крашек *Stars for Donald* (рис. 3.32 и рис. 42 на цветной вклейке) мы можем наблюдать бесконечное взаимодействие ромбов Пенроуза, пентаграмм, пятиугольников, уменьшающихся к центральной точке композиции. Отношения золотой пропорции представлены многими различными способами в различных шкалах.

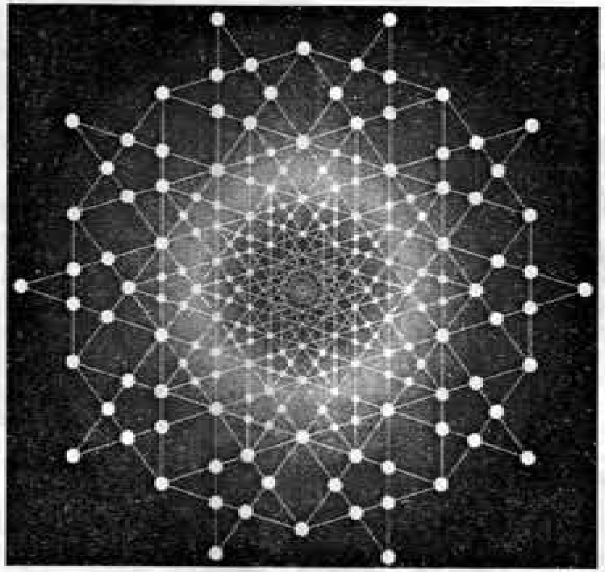


Рис. 3.32. *Крашек.* Stars for Donald (компьютерная графика, 2005)

Художественные композиции Матюшки Тейи Крашек привлекли огромное внимание представителей науки и искусства. Ее искусство приравнивают к искусству Маурица Эшера и называют словенскую художницу «южноевропейским Эшером» и «словенским подарком» мировому искусству.

3.10. Нужно ли вводить Золотое сечение в школьное образование?

У каждого человека, прочитавшего эту книгу, возникает вполне естественный вопрос: почему с такой интересной информацией, касающейся Золотого сечения, чисел Фибоначчи и правильных многогранников, его не ознакомили в средней школе или хотя бы в университете? Ведь эти знания существуют в науке по крайней мере две с половиной тысячи лет и, несомненно, обогатили бы каждого из нас. Однако вряд ли кто-либо из признанных ученых в области педагогики, увенчанных лаврами и почетными научными званиями за создание программ математической подготовки, сможет дать вразумительный ответ на этот вопрос. Откровенно говоря, и мы, авторы настоящей книги, тоже не можем ответить на этот вопрос. Скорее всего, дело в традиции. Традиционно классическая наука, а следовательно, и классическая педагогика, относилась к Золотому сечению с некоторым предубеждением в связи с тем, что оно широко использовалось в астрологии и так называемых эзотерических науках (пентаграмма, платоновы тела, куб Метатрона и т. д.). И, по-видимому, «материалистическое образование» не нашло ничего более разумного, как выбросить Золотое сечение на свалку сомнительных научных концепций вместе с астрологией и эзотерическими науками.

Анализ современных программ математического образования в таких странах, как США, Канада, Россия и Украина, показывает, что в большинстве из них нет даже упоминания о Золотом сечении, то есть имеет место полное игнорирование одного из важнейших математических открытий античной математики.

По мнению Кеплера (и не только Кеплера), изучению уникальных свойств Золотого сечения в окружающем нас мире надо уделять в образовании не меньшее внимание, чем теореме Пифагора. И тогда вполне возможно, что изучение математики, которую в своем большинстве ученики рассматривают как сухую и неинтересную дисциплину, неожиданно могло бы превратиться в увлекательный поиск математических закономерностей окружающего нас мира. То есть введение Золотого сечения в математическое образование поднимает интерес учащихся к изучению математики!

По-видимому, первый шаг в реформе школьного образования, основанной на Золотом сечении, состоит в том, чтобы ввести в школьную геометрию раздел «Золотое сечение». В этом разделе школьникам будет интересно узнать о совершенных геометрических фигурах, основанных на Золотом сечении, в частности, о золотом прямоугольнике, пентаграмме, золотой спирали, платоновых телах.

Переходим к алгебре. Здесь школьники изучают алгебраические уравнения и методы их решения. Но для школьников будет интересно узнать о специальном классе алгебраических уравнений — *золотых алгебраических уравнениях*, отличительной особенностью которых является то, что все они имеют общий корень — золотую пропорцию. И это дает нам основание ввести в алгебру небольшой раздел «Золотые алгебраические уравнения». Далее, в той части школьного курса математики, который посвящен изложению основ теории чисел, нельзя не упомянуть о *числах Фибоначчи и Люка, формулах Бине.*

Переходим к наукам о природе — физике, химии, астрономии, ботанике, биологии. В курсе «Физика» при изучении кристаллов желательно упомянуть о недавнем открытии *квазикристаллов*, основанных на икосаэдрической симметрии. Ведь наши школьники уже знают об икосаэдре из курса «Геометрия». В курсе «Химия» целесообразно обратить внимание школьников на химические соединения, построенные «по Фибоначчи». А в курсе «Астрономия» необходимо рассказать школьникам о *резонансной теории Солнечной системы*, основанной на Золотом сечении. Только таким путем можно объяснить школьникам причины устойчивости Солнечной системы.

Украшением курса «Ботаника» может стать раздел «Закон филлотаксиса». Природа дает огромное количество подтверждений этого закона, и это обстоятельство является главным аргументом в пользу такого раздела. Подобные же разделы были бы желательны и в курсах «Биология» или «Анатомия». В последнем курсе уместно рассказать о пропорциях человеческого тела, основанных на Золотом сечении. Можно себе представить, с каким увлечением школьники производили бы исследование пропорций своего собственного тела, лица и других частей тела и сравнивали бы их с фигурами Дорифора или Венеры Милосской. Большой интерес у школьников вызовет рассказ о том, что сердечная деятельность млекопитающих полностью подчиняется закону Золотого сечения.

Рассмотрим теперь школьные курсы по искусству. Принципы использования Золотого сечения в произведениях искусства (золотой прямоугольник, золотая спираль, «двойной» квадрат и т. д.) достаточно просты для понимания, и примеры их использования в архитектуре, живописи и скульптуре интересны для школьников и навсегда отложились бы в их памяти.

Эти примеры можно было бы продолжить. Но радикальным решением в области школьного образования явилось бы введение специальной учебной дисциплины с условным названием «Математика Золотого сечения». Эту дисциплину можно было бы рассматривать как завершающую дисциплину физико-математического и эстетического образования учащихся. В результате введения такой дисциплины в школьном образовании появляется цельная концепция — Золотое сечение, которая неразрывной цепью объединит все школьные дисциплины. Это будет способствовать осознанию глубокого единства Природы во всех ее проявлениях — от атомного ядра и генетического кода до Галактики — и формированию нового научного мировоззрения, основанного на принципах гармонии и Золотого сечения. А «лабораторной базой» такого курса можно считать сайт «Музей Гармонии и Золотого сечения» (www.goldenmuseum.com), созданный Алексеем Стаховым и Анной Слученковой в Интернете в 2001 году.

Своими соображениями по поводу реформы математического образования и введения курса «Математика Гармонии и Золотого сечения» профессор Стахов поделился с профессором Аланом Роджерсоном, который возглавляет международный проект «Математическое образование в XXI веке». Профессор Роджерсон прислал автору весьма обнадеживающее письмо следующего содержания:

> «Дорогой профессор Стахов! Я восхищен вашей статьей, наполненной интереснейшей информацией, часть из которой мне неизвестна. Ваши идеи настолько глубоки, что их внедрение в школах — это следующий шаг в математическом образовании. Имеются ли преподаватели на Украине или где-либо, которые начали использовать ваши идеи и вашу научную программу? В наибольшей степени я был бы заинтересован в информации об их преподавательском опыте.
>
> С наилучшими пожеланиями, Алан Роджерсон».

Заключение

Итак, дорогие читатели, вы закончили чтение нашей первой книги, книги о Золотом сечении, или коде да Винчи, о числах Фибоначчи и Люка, которые в совокупности представляют собой универсальный код Природы. Надеемся, что нам удалось убедить вас в том, что этот «универсальный код» проявляет себя в Природе в виде золотых спиралей, которые лежат в основе морских раковин, в виде пентагональной симметрии, которая широко распространена в живой природе, наконец, в виде закона филлотаксиса, согласно которому построены поверхности сосновых и кедровых шишек, кактусов, ананасов, подсолнечников, а также корзинки цветов. Этот код лежит в основе совершенного человеческого тела, а также определяет красоту человеческого лица. Этот код лежит также в основе искусства, и это естественно. Ведь главная задача искусства состоит в том, чтобы отображать гармонию и красоту Природы. И не случайно Золотое сечение стало своеобразным эстетическим каноном греческого искусства и Возрождения, а также широко использовалось художниками, скульпторами и архитекторами последующих эпох.

В течение многих тысячелетий Золотое сечение было объектом восхищения и поклонения выдающихся ученых и мыслителей: Пифагора, Платона, Евклида, Леонардо да Винчи, Луки Пачоли, Иоганна Кеплера, Цейзинга, Алана Тьюринга, Алексея Лосева и Павла Флоренского. В современной науке интерес к Золотому сечению возрос с новой силой. Золотое сечение оказалось источником новых плодотворных идей в математике, теоретической физике и кристаллографии, экономике, биологии, ботанике, компьютерной науке, теории кодирования и криптографии. Два наиболее крупных научных открытия XX века — *квазикристаллы* и *фуллерены* (Нобелевская премия 1996 года) основаны на *платоновом икосаэдре* и *архимедовом усеченном икосаэдре*, главной пропорцией которых является Золотое сечение.

Одним из важнейших достижений современной математики является введение Стаховым, Ткаченко и Розиным *гиперболических функций Фибоначчи и Люка*, которые, по существу, радикально изменяют «теорию чисел Фибоначчи» и превращают ее в «непрерывную» теорию, к которой применимы все достижения «непрерывной» математики, в частности дифференцирование и интегрирование. Но самое главное, что эти функции открывают новые перспективы в исследовании глубинных процессов, протекающих в живой и неживой природе, потому что геометрия природы является «гиперболической». Параллельно с гиперболической геометрией, основанной на классических гиперболических функциях («гиперболическая геометрия Лобачевского», «четырехмерный мир Минковского» и другие), в природе наблюдается и другая гиперболическая геометрия, основанная на гиперболических функциях Фибоначчи и Люка.

«Золотой» гиперболический мир, основанный на такой геометрии, существует объективно и независимо от нашего сознания. Этот мир с удивительной настойчивостью проявляет себя прежде всего в живой природе, в частности, в виде филлотаксисных спиралей, основанных на числах Фибоначчи, числах Люка и других числовых рекуррентных рядах подобного типа (закон филлотаксиса). Заметим, что гиперболические функции Фибоначчи и Люка, лежащие в основе явления филлотаксиса, не являются выдумкой математиков-фибоначчистов, а отражают важнейшую математическую закономерность, лежащую в основе геометрии живой природы.

В заключение авторы хотели бы обратить внимание на следующее странное обстоятельство. Можно только удивляться тому факту, что в течение столетий математики и физики-теоретики не уделяли должного внимания развитию математического аппарата для моделирования **«золотого» гиперболического мира**, который существует в реальной действительности. Возможно, причиной этого является тот факт, что «золотой» гиперболический мир имеет большее отношение к биологии и ботанике, чем к физике. Однако, к чести определенной группы физиков-теоретиков, в конце XX столетия отношение к Золотому сечению и числам Фибоначчи, лежащих в основе «золотого» гиперболического мира, в современной теоретической физике начинает быстро изменяться.

Огромный интерес для развития современной физики представляют исследования английского физика египетского происхождения профессора Мохаммеда Эль Нашие, главного редактора Международного физического журнала *Chaos, Solitons & Fractals»* (кстати, одного из самых рейтинговых научных журналов в мире). В его работах приведено очень простое доказательство фундаментальной связи квантово-механического пространства-времени с фракталами и теорией трансфинитных множеств Кантора. И очень убедительное доказательство связи квантовой механики с Золотым сечением в результате анализа знаменитого квантово-механического эксперимента Томаса Юнга, который доказал корпускулярно-волновую природу света! А это означает, что Золотое сечение и есть главная квантово-механическая константа, через которую могут быть выражены все остальные физические константы. И, наверное, нельзя считать случайностью тот факт, что известный российский физик-теоретик профессор Ю. Владимиров (кафедра теоретической физики Московского университета) заканчивает свою книгу «Метафизика» (2002) весьма примечательной фразой:

> «Таким образом, можно утверждать, что в теории электрослабых взаимодействий возникают отношения, приближенно совпадающие с "Золотым сечением", играюшим важную роль в различных областях науки и искусства».

Рис. 23. *Тициан.* Вакх и Ариадна

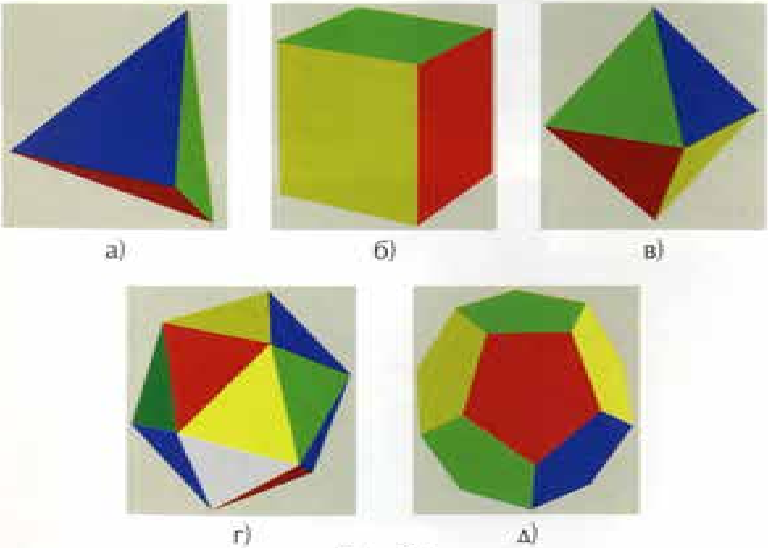


Рис. 24

Платоновы тела:
а) — октаэдр («Огонь»), б) — гексаэдр, или куб («Земля»),
в) — октаэдр («Воздух»), г) — икосаэдр («Вода»),
д) — додекаэдр («Вселенский разум»)

а)

б)

в)

г)

д)

Рис. 25
Архимедовы тела:
а) — усеченный тетраэдр, б) — усеченный куб, в) — усеченный октаэдр, г) — усеченный додекаэдр, д) — усеченный икосаэдр

а)

б)

Рис. 26
Архимедовы тела: а) — кубооктаэдр, б) — икосододекаэдр

а)

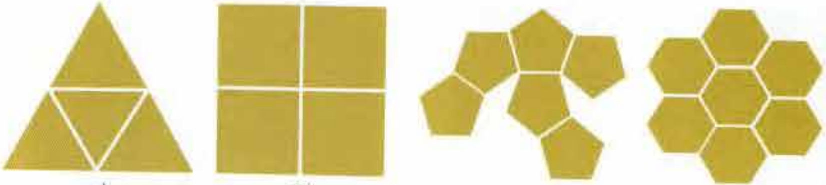
б)

Рис. 27
Архимедовы тела: а) — ромбокубооктаэдр, б) — ромбоикосододекаэдр

а)

б)

Рис. 28
Архимедовы тела: а) — курносый куб, б) — курносый додекаэдр



а) б) в) г)

Рис. 29
Плотное заполнение плоскости:
а) — треугольниками, б) — квадратами, в) — пятиугольниками,
г) — шестиугольниками

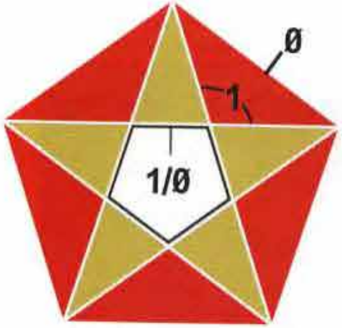
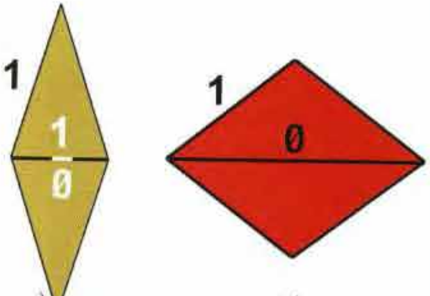
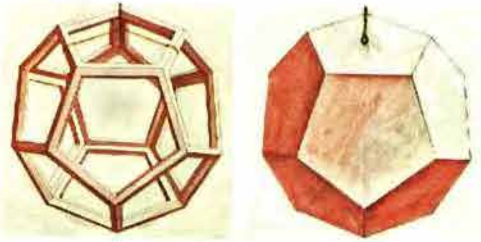


Рис. 30
Пентагон



а) б)

Рис. 31
«Золотые» ромбы:
а) — «тонкий» ромб, б) — «толстый» ромб



а) б)

Рис. 32
Изображения Леонардо да Винчи
додекаэдра в книге Луки Пачоли
«Божественная пропорция»:
а) — методом жестких ребер,
б) — методом сплошных граней

Рис. 33
Изображение Леонардо да Винчи
усеченного икосаэдра методом
жестких ребер в книге
Луки Пачоли
«Божественная пропорция»

Рис. 34
Барбари. Лука Пачоли

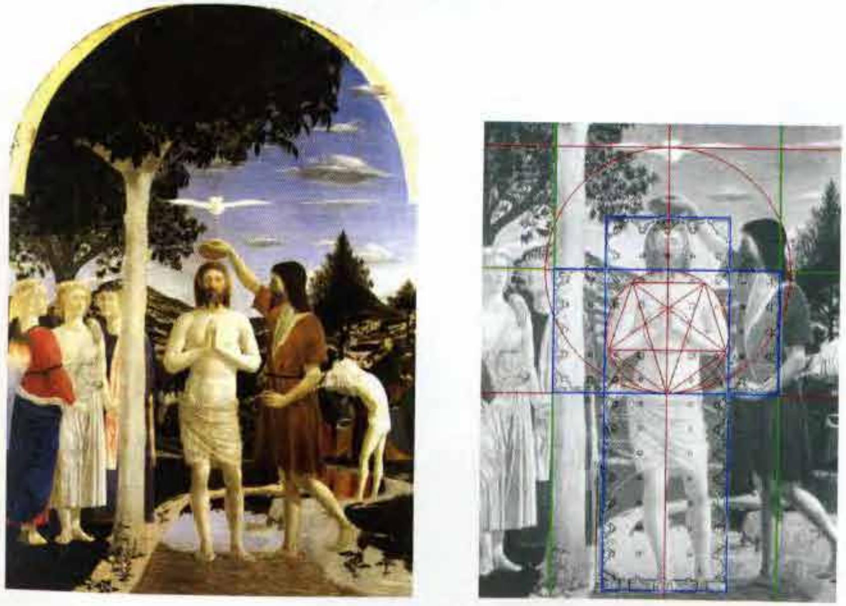


Рис. 35
Картина Пьеро делла Франческа «Крещение Христа»
и ее гармонический анализ

Рис. 36
Фра Джованни да Верона. Интарсии для церкви Санта Мария ин Орнано в Вероне

Рис. 37
Дали. Тайная вечеря

Рис. 38
Матюшка Тейя Крашек на своей выставке *Kaleidoscopic Fragrances* (Любляна, 2005)

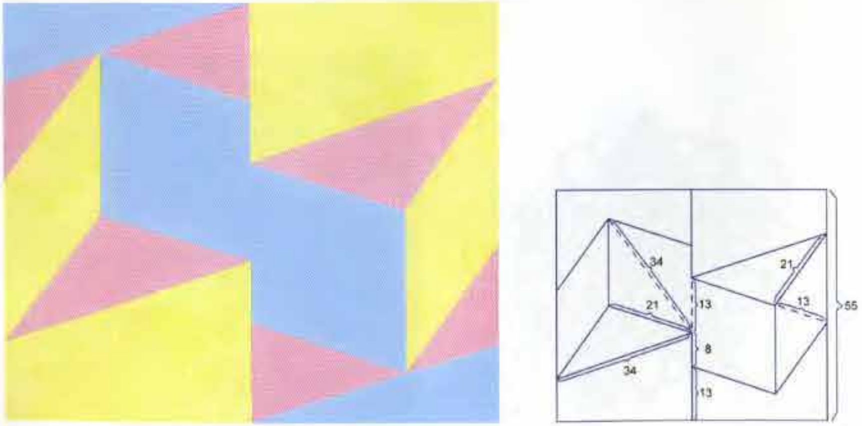
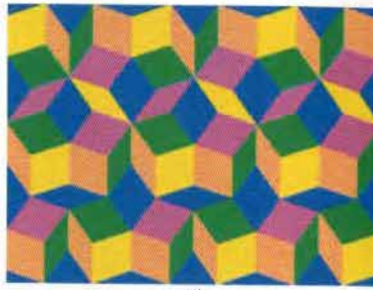
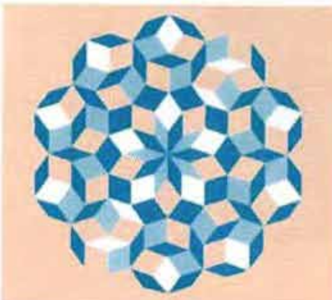


Рис. 39
Крашек. Числа Фибоначчи (холст, 1998).

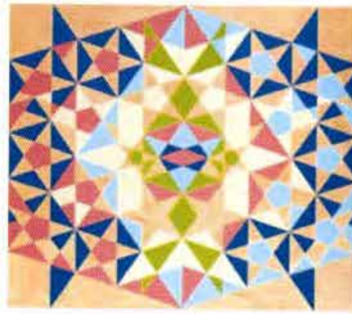
а)



б)



в)



г)

Рис. 40
Мир Тейи Крашек:
а) — «Мир квазикристаллов» (компьютерная графика, 1996),
б) — «Звезды» (компьютерная графика, 1998), в) — «10/5» (холст, 1998),
г) — «Квазикуб» (холст, 1999)

Рис. 41
Крашек, Пиковер. Биогенезис (2005)

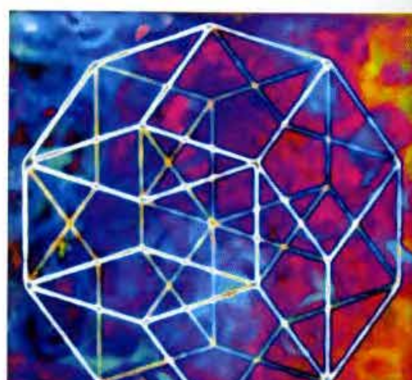


Рис. 42
Крашек. Double Star GA

Триллер «Код да Винчи», написанный популярным американским писателем Дэном Брауном, стал бестселлером XXI века.

Но что означает «Код да Винчи»?

Что это за число, которое Леонардо да Винчи назвал Золотым сечением и не оно ли лежит в основе Кода да Винчи?

Кто раскроет его **тайну**, тот будет владеть **миром**!

Уникальная книга, которую вы держите в руках, позволит вам приблизиться к раскрытию этой тайны.

Термин «Золотое сечение» был введен Леонардо да Винчи, он называл его «Божественной пропорцией». В течение многих тысячелетий оно было объектом восхищения и изучения выдающихся ученых и мыслителей: Пифагора, Платона, Евклида, Павла Флоренского. Пирамида Хеопса, знаменитый греческий храм Парфенон, непревзойденная «Мона Лиза», этюды Шопена — вот далеко не полный перечень выдающихся произведений искусства, наполненных чудесной гармонией, основанной на Золотом сечении и математических закономерностях, которые определяют также строение Вселенной и всего живого на Земле.

Код да Винчи

ПИТЕР®

ISBN 5-469-01369-3

9 785469 013693

Заказ книг:

197198, Санкт-Петербург, а/я 619
тел.: (812) 703-73-74, postbook@piter.com

61093, Харьков-93, а/я 9130
тел.: (057) 712-27-05, piter@kharkov.piter.com

www.piter.com — вся информация о книгах и веб-магазин